Seminar aus Finanz- und Versicherungsmathematik

Zinsderivate

Daniel FERSTL

TU-Wien

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Grundlegendes über Derivate[1]

Definition: Ein Derivat ist ein Finanzinstrument, dessen Auszahlung an den Wert anderer Variablen, der sogenannten *underlyings*, gebunden ist. Dem Wortursprung folgend, sagt man, dass sich der Wert eines Derivates *ableiten* lässt. Solche underlyings können Wertpapiere, Waren, Wechselkurse oder ähnliches sein.

Derivate haben sich auf ganz natürliche Weise entwickelt, eigentlich gibt es sie schon seit tausenden Jahren. Man könnte zum Beispiel das Versprechen eines Bauern, zu einem gewissen Zeitpunkt in der Zukunft eine gewisse Menge seiner Ernte gegen eine vereinbarte Leistung zu tauschen, als einen Forward-Kontrakt ansehen.
In den letzten 25 Jahren haben Derivate auch in der Finanzwelt große Bedeutung erlangt. An Derivatbörsen etwa werden standardisierte Kontrakte gehandelt, deren Bedingungen von der jeweiligen Börse festgesetzt werden.
Das größere Handelsvolumen weist jedoch der sogenannte OTC-Handel auf. OTC steht dabei für *over the counter* (über den Tresen). Es handelt sich um Finanztransaktionen, die nicht über die Börse abgewickelt werden, also außerbörslichen Handel, der über Telefon, hauptsächlich aber via Internet betrieben wird. Dies hat den Vorteil, dass individuelle Produkte gehandelt werden können, im Gegensatz zu den standardisierten Kontrakten an den Börsen.

1.2 Einfache Derivate[1]

1.2.1 Forward-Kontrakte

Definition: Die Verpflichtung, eine gewisse Anzahl von Einheiten an einem Underlying, zu einem gewissen Zeitpunkt in der Zukunft zu einem gewissen Preis zu kaufen oder zu verkaufen, nennt man einen Forward-Kontrakt.
Dabei unterscheidet man zwischen den Positionen der beiden Vertragspartner. Der Käufer des Underlyings nimmt die sogenannte *long*-Position, der Verkäufer hingegen die *short*-Position ein.

Charakteristisch für Derivate ist, dass man bei Vertragsabschluss den Lieferpreis, also den Preis, der für das Underlying zum Lieferzeitpunkt bezahlt wird, so berechnet, dass keiner der Vertragspartner einen Gewinn **erwarten** kann.
Daher ergibt sich für den zu vereinbarenden Lieferpreis folgende Formel:

$$F_0 = S_0 e^{rT} \tag{1.1}$$

wobei gilt:
F_k bezeichnet man als den Forward Preis zum Zeitpunkt k. Dieser entspricht dem zu vereinbarenden Lieferpreis, wenn der Forward-Kontrakt zur Zeit k abgeschlossen würde.
S_k bezeichnet man als den Spot Preis, den Preis den das Underlying zur Zeit k wirklich besitzt.
T bezeichnet die verbleibende Zeit bis zum Lieferzeitpunkt.
r bezeichnet den risikolosen Zinssatz.

Der Forward Preis zu Vertragsabschluss entspricht also dem über die Laufzeit aufgezinsten Spot Preis.

Da der Spot Preis des Underlyings bis zum Lieferzeitpunkt allerdings nicht unverändert bleiben, sondern variieren wird, wird sich natürlich auch der Wert des Forward-Kontrakts, der ursprünglich 0 beträgt, verändern. Man berechnet diesen wie folgt:

$$f_k = (F_k - \underbrace{F_0}_{K})e^{-rT} \tag{1.2}$$

wobei gilt:
K bezeichnet den vereinbarten Lieferpreis des Forward-Kontrakts,
F_k den Lieferpreis, der zu vereinbaren wäre, würde der Kontrakt zum Zeitpunkt k geschlossen und f_k den Wert eines Forwards in der long-Position zum selben Zeitpunkt.

Vertauscht man F_0 und K, so erhält man den Wert aus der Sicht der short-Position.

Bemerkung: Es wurden übliche vereinfachende Annahmen über den Forward Preis getroffen:

- Es gibt keine Transaktionskosten.
- Man bekommt den gleichen Zins für Kredit und Veranlagung.
- *short selling* ist möglich, d.h. es ist möglich die short-Position in einem Forward-Kontrakt einzunehmen, obwohl man das Underlying zu diesem Zeitpunkt gar nicht besitzt, weil man es sich borgen kann.
- Die Lagerung des Underlyings bis zum Lieferzeitpunkt ist möglich (Obst könnte verfaulen) und verursacht keine Kosten (Lagerhalle, Versicherung).
- Der Nutzen, den der Besitz des Underlyings mit sich bringen kann, wird nicht berücksichtigt.

1.2.2 Future-Kontrakte

Da sich Forwards als sehr nützlich erwiesen haben, hat sich eine Börse dafür entwickelt. Dies sorgt für Sicherheit und Bequemlichkeit im Handel mit Forwards, da die Börse die Suche nach

einer Gegenpartei übernimmt, das Gegenparteirisiko fällt also weg. An einer Börse werden, wie bereits zuvor erwähnt, standardisierte Kontrakte gehandelt, was bezüglich Forward-Kontrakten allerdings ein Problem mit sich bringt, da sich der Forward Preis ständig ändert. Man würde also tausende Verträge pro Tag abschließen, die mit Ausnahme des vereinbarten Lieferpreises völlig ident sind.
Daher gibt es als Alternative Future-Kontrakte. Diese unterscheiden sich eigentlich nicht besonders von Forward-Kontrakten, allerdings mit einer gravierenden Ausnahme genannt *marking to market*:
Der Future Preis, der zu Vertragsabschluss dem Forwardpreis entspricht, wird während der Laufzeit des Kontrakts jeden Tag neu berechnet, sodass der Wert des Future-Kontrakts immer 0 beträgt, was den Handel damit sehr erleichtert. Gleichzeitig wird die Differenz zwischen dem neuen und dem alten Future Preis, abhängig von der Veränderung, von einem sogenannten *Margin Konto* abgehoben oder darauf einbezahlt. Jeder der Vertragspartner muss ein solches Konto zur Verfügung stellen.

Der gravierende Unterschied zwischen einem Forward- und einem Future-Kontrakt besteht also darin, dass es bei einem Forward erst zum Lieferzeitpunkt zu Zahlungen kommt, bei einem Future hingegen jeden Tag Zahlungen erfolgen.

Bemerkung: Es ist naheliegend, dass der Future und der Spot Preis gegen den selben Wert konvergieren.

1.2.3 Swaps

Definition: Die Vereinbarung zweier Vertragspartner die über eine gewisse Zeitdauer anfallenden Zahlungsströme zu tauschen, nennt man einen Swap.

Der wahrscheinlich wichtigste Vertreter von Swaps ist der sogenannte *Plain Vanilla Swap.* Dabei wird ein variabler Zinssatz, wie z.B. LIBOR, gegen einen konstanten Zinssatz getauscht, wobei sich beide auf denselben Nominalbetrag beziehen.
Dies wird häufig genutzt, um dem Risiko von schwankenden Zahlungen zu entgehen, indem man sie gegen konstante eintauscht.

1.2.4 Optionen

Definition: Eine europäische Option gibt seinem Besitzer die Möglichkeit, nicht die Pflicht, zu einem gewissen Zeitpunkt das Underlying für einen gewissen Preis zu kaufen (Call) oder zu verkaufen (Put).

Die Auszahlung einer europäischen Call-Option beträgt $\max(S_T - K)$.
Für die europäische Put-Option gilt entsprechend $\max(K - S_T)$.

[1] Abschnitte 1.1: „Grundlegendes über Derivate“ und 1.2: „Einfache Derivate“ folgen [DL, Kapitel 10]

Kapitel 2

Zinsderivate

Definition: Ein Zinsderivat ist ein Derivat, dessen Auszahlung von einem Zinssatz abgeleitet wird. Das Underlying kann also zum Beispiel eine Option, ein Swap oder ähnliches sein.

Zinsderivate haben in den achtziger und neunziger Jahren stark an Bedeutung gewonnen. Daher ist es wichtig Verfahren zur Bewertung und Absicherung solcher Produkte zu entwickeln.

Jedoch erweisen sich Zinsderivate als schwieriger zu bewerten als Aktien- oder Währungsderivate. Dafür gibt es einige Gründe:

- Das Verhalten eines einzelnen Zinssatzes ist komplexer als das eines Aktien- oder Wechselkurses.
- Es ist oft notwendig ein Modell zu entwickeln, das das Verhalten der gesamten Spot-Rate-Kurve beschreibt.
- Die Volatilitäten an verschiedenen Punkten der Rendite-Kurve sind unterschiedlich.
- Zinssätze werden sowohl für die Diskontierung als auch für die Bestimmung der Auszahlung des Derivats herangezogen.

Die folgenden vier Abschnitte beschäftigen sich mit den drei am weitesten verbreiteten OTC-Zinsderivaten und deren Bewertung.

2.1 Black- und Black-Scholes-Modell[2]

2.1.1 Black-Scholes-Modell

Die folgenden Formeln zur Bewertung europäischer Optionen, die 1973 veröffentlicht wurden, nennt man *Black-Scholes Formeln*:

[2] Abschnitt 2.1: „Black- und Black-Scholes-Modell" folgt [JH, Kapitel 13]

Sei c der Preis einer europäischen Call-, sowie p der Preis einer europäischen Putoption, S_0 der Wert des Underlyings der Option, K der Ausübungspreis, σ die Volatilität, T die Restzeit bis zum Ausübungszeitpunkt und S_T logarithmisch normalverteilt. Dann gilt:

$$c = S_0\Phi(d_1) - e^{-rT}K\Phi(d_2) \tag{2.1}$$

$$p = e^{-rT}K\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1) \tag{2.2}$$

$$\text{mit } d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln(\frac{S_0}{e^{-rT}K}) \pm \frac{1}{2}\sigma^2 T)$$

Beweis:

Zu zeigen ist, dass für die erwartete Auszahlung einer Option auf ein Underlying, dessen logarithmisch normalverteilter Wert V sei und w die Standardabweichung von $\ln V$ sei, folgendes gilt:

$$E[\max(V-K,0)] = E[V]\Phi(d_1) - K\Phi(d_2) \tag{2.3}$$

$$\text{mit } d_{1,2} = \frac{1}{w}(\ln(\frac{E[V]}{K}) \pm \frac{w^2}{2}).$$

Sei $g(V)$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von V. Dann gilt:

$$E[\max(V-K,0)] = \int_K^\infty (V-K)g(V)\ dV$$

Da V logarithmisch normalverteilt ist, gilt, dass $\ln V$ normalverteilt ist mit Erwartungswert $m = \ln(E[V]) - \frac{w^2}{2}$ und Varianz w^2. Daher ist $Q = \frac{\ln V - m}{w}$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable und besitzt die Dichtefunktion $\varphi(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Q^2}{2}}$ und die Verteilungsfunktion $\Phi(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Q} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

Schreibt man das obige Integral über V zu einem Integral über Q um und spaltet es dann auf, so erhält man:

$$E[\max(V-K,0)] = \int_{\frac{\ln K - m}{w}}^{\infty} (e^{m+wQ} - K)\varphi(Q)dQ = \int_{\frac{\ln K - m}{w}}^{\infty} e^{m+wQ}\varphi(Q)dQ - K\int_{\frac{\ln K - m}{w}}^{\infty} \varphi(Q)dQ \tag{2.4}$$

Durch Einsetzen der Dichtefunktion im Term $e^{m+wQ}\varphi(Q)$, Durchführung einiger einfacher Umformungsschritte und nochmaliger Verwendung der Dichtefunktion erhält man $\varphi(Q-w)e^{m+\frac{w^2}{2}}$. Mit dieser Umformung folgt also aus Gleichung (2.4):

$$\underbrace{e^{m+\frac{w^2}{2}}}_{E[V]}\underbrace{\int_{\frac{\ln K - m}{w}}^{\infty} \varphi(Q-w)dQ}_{\Phi(d_1)} - K\underbrace{\int_{\frac{\ln K - m}{w}}^{\infty} \varphi(Q)dQ}_{\Phi(d_2)}$$

Man erkennt leicht, dass die beiden Integrale auch mittels der Verteilungsfunktion $\Phi(Q)$ geschrieben werden können. Das erste Integral ergibt dann $1 - \Phi(\frac{\ln K - m}{w} - w) = \Phi(\frac{m - \ln K}{w} + w)$.
Setzt man jetzt noch für m ein, so bekommt man genau $\Phi(d_1)$.
Für das zweite Integral erhält man analog $\Phi(d_2)$.
Setzt man jetzt auch noch in $e^{m+\frac{w^2}{2}}$ für m ein, erhält man $E[V]$.

Somit wurde die Gültigkeit von Gleichung (2.3) bewiesen.

Bemerkung: Der obige Beweis belegt die Richtigkeit des allgemeinen Ansatzes des Black-Scholes-Modells. Um die Formeln zur Bewertung europäischer Optionen zu erhalten, muss uns bewusst sein, dass der Wert einer europäischen Kaufoption folgender ist:
$c = e^{-rT}E[\max(S_T - K, 0)]$was mit Gleichung (2.3) also weiter gleich $e^{-rT}(E[S_T]\Phi(d_1) - K\Phi(d_2))$ ist. Sei nun $E[S_T] = S_0 e^{rT}$, so erhalten wir die Black-Scholes Formel zur Bewertung europäischer Kaufoptionen mit S_T logarithmisch normalverteilt.

Bemerkung: Obige Bemerkung gilt natürlich analog für europäische Verkaufsoptionen.

2.1.2 Black-Modell

Da man sich in der Finanzwelt mit dem Black-Scholes-Modell und dessen Annahmen der logarithmischen Normalverteilung, sowie des Volatilitätsmaßes zur Beschreibung der Unsicherheit bereits angefreundet hatte, wurden Versuche unternommen das Modell dahingehend zu erweitern, sodass es auch auf Zinsderivate Anwendung finden sollte.

Dazu betrachten wir das Black-Modell, das ursprünglich zur Bewertung von Rohstoff-Futures vorgeschlagen wurde:

Sei $P[0, T]$ der Wert einer Nullkupon-Anleihe, die zum Zeitpunkt T den Betrag 1 ausbezahlt, also ein risikoloser Zinssatz, F_0 der Forward-Preis des Underlyings S_T, dem dieselbe logarithmische Normalverteilung unterstellt wird wie zuvor und $\sigma\sqrt{T}$ die Standardabweichung von $\ln(S_T)$.
Dann gilt:

$$c = P[0, T](F_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)) \tag{2.5}$$

$$p = P[0, T](K\Phi(-d_2) - F_0\Phi(-d_1)) \tag{2.6}$$

$$\text{mit } d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln(\frac{F_0}{K}) \pm \frac{1}{2}\sigma^2 T)$$

Bemerkung: Setzt man $S_0 = F_0 e^{-rT}$ und verwendet $P[0, T]$ anstelle von e^{-rT} so erhält man die obigen Formeln direkt aus den Black-Scholes Formeln.

Für den Fall, dass man die Auszahlung für den Zeitpunkt T berechnet, sie in Wirklichkeit aber erst zum Zeitpunkt T^* erfolgt, verwendet man folgende Formeln:

$$c = P[0, T^*](F_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)) \tag{2.7}$$

$$p = P[0, T^*](K\Phi(-d_2) - F_0\Phi(-d_1)) \tag{2.8}$$

$$\text{mit } d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln(\frac{F_0}{K}) \pm \frac{1}{2}\sigma^2 T)$$

Anwendbarkeit

Wenn die verwendeten Zinssätze konstant oder deterministisch sind, gibt es keine Probleme. Dann entspricht der Future-Preis dem Forward-Preis und es gilt $E[S_T] = F_0$ in einer risikoneutralen Welt.

Sind die Zinssätze allerdings stochastisch, sind zwei Punkte zu klären:

- Der Forward-Preis entspricht nicht dem Future-Preis. Wieso kann man trotzdem den Forward-Preis verwenden?
- Warum kann man bei der Diskontierung die Tatsache vernachlässigen, dass die Zinssätze stochastisch sind?

Es wird sich zeigen, dass sich die beiden Annahmen ausgleichen, das Modell also keine Näherungslösungen, sondern exakte Ergebnisse liefert.

2.2 Anleiheoptionen[3]

Der folgende Abschnitt wird sich nun mit sogenannten Anleiheoptionen beschäftigen:

Definition: Eine Option auf den Kauf oder den Verkauf einer Anleihe nennt man eine Anleiheoption.

Eingebettete Anleiheoptionen

Bei einer eingebetteten Anleiheoption handelt es sich um Optionen, die in den Anleihebedingungen festgeschrieben sind, um diese entweder für den Emittenten oder den Käufer attraktiver zu machen.

Ein Beispiel dafür wäre etwa ein sogenannter „Callable Bond“. Dabei besitzt der Emittent der Anleihe die Möglichkeit, die Anleihe gegen einen vorher vereinbarten Preis zu bestimmten Zeitpunkten zurückzukaufen. Man kann also sagen, dass der Käufer der Anleihe dem Emittenten eine Kaufoption verkauft hat.
Üblich dabei ist, dass die ersten Jahre eine Sperrfrist gilt, und danach der Rückkaufwert, also der Ausübungspreis der Option, kontinuierlich sinkt.
Der Wert der Kaufoption spiegelt sich in der Anleihenrendite wider. Üblicherweise erzielen Callable Bonds eine höhere Rendite.

Ein anderes Beispiel ist der sogenannte „Puttable Bond“, wobei es sich im Prinzip um das Gegenstück zum Callable Bond handelt. Hierbei besitzt nun der Käufer der Anleihe Ausübungsrechte, und zwar ist es ihm gestattet zu gewissen Zeitpunkten den vorzeitigen Rückkauf der Anleihe gegen einen zuvor vereinbarten Preis zu verlangen. Man kann also sagen, dass er eine Verkaufsoption vom Emittenten erworben hat.
Da die eingebettete Verkaufsoption den Wert der Anleihe für den Käufer erhöht, bieten Puttable Bonds üblicherweise eine eher niedrigere Rendite.

Weitere Beispiele wären unter anderem die Möglichkeit zur vorzeitigen Tilgung von Krediten, sowie zur vorzeitigen Entnahme einer Einlage ohne Einbußen oder eine Kreditzusage einer Bank.

Europäische Anleiheoptionen

Bei einer europäischen Anleiheoption handelt es sich also um eine Option auf den Kauf bzw. Verkauf einer Anleihe zu einem gewissen Zeitpunkt gegen einen gewissen Preis. Viele OTC-Anleiheoptionen und einige eingebettete sind europäischen Typs. Dieser Teilabschnitt beschäftigt sich nun mit deren Bewertung:

Sei der Anleihepreis bei Fälligkeit der Option logarithmisch normalverteilt. Dann sind die bereits bekannten Formeln des Black-Modells insofern zur Bewertung geeignet, als dass man den Forward-Preis F_0 durch den Forward-Anleihepreis F_B ersetzt, sowie die Volatilität σ durch die Volatilität des Forward-Anleihepreises σ_B. Die Standardabweichung des logarithmus des Anleihepreises zur Fälligkeit der Option sei wie gehabt $\sigma_B\sqrt{T}$.
Dann gilt:

$$c = P[0,T](F_B\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)) \tag{2.9}$$

$$p = P[0,T](K\Phi(-d_2) - F_B\Phi(-d_1)) \tag{2.10}$$

$$\text{mit } d_{1,2} = \frac{1}{\sigma_B\sqrt{T}}(\ln(\frac{F_B}{K}) \pm \frac{1}{2}\sigma_B^2 T) \text{ und } F_B = \frac{B_0 - I}{P[0,T]}$$

Dabei bezeichnet B_0 den Preis der Anleihe zum Zeitpunkt 0 und I den Barwert der Kuponzahlungen.

Theoretische Begründung

Mit der Annahme einer risikoneutralen Welt gelangen wir zu folgenden Ergebnissen:

1) Der Preis einer Kaufoption auf eine Anleihe beträgt $c = P[0,T]E[\max(B_T - K, 0)]$

2) Der Erwartungswert des Anleihepreises zum Zeitpunkt T ist gleich dem Forward-Anleihepreis $E[B_T] = F_B$

Da der Anleihepreis als logarithmisch normalverteilt angenommen wird, erhält man die Formeln (2.9) und (2.10) zur Bewertung einer Anleiheoption, indem man auf den Preis der Kaufoption (Punkt 1) Gleichung (2.3) anwendet und den Forward-Anleihepreis (Punkt 2) einsetzt. Dazu kommt natürliche eine analoge Vorgehensweise für die Verkaufsoption einer Anleihe.
Man kann also den heutigen Zinssatz zur Diskontierung verwenden, wenn man außerdem den erwarteten Anleihepreis gleich dem Forward-Anleihepreis setzt.

2.3 Zinscap und Zinsfloor[3]

Zinscap

Bei einem Zinscap handelt es sich um eine weitverbreitete, am OTC-Markt angebotene Zinsoption:

> **Definition:** Ein Zinscap ist ein Finanzinstrument, dessen Ausschüttung nur dann eintritt, wenn ein variabler Zinssatz R_k die sogenannte Cap Rate R_K übersteigt. Die Höhe der Ausschüttung hängt dann von der Höhe der Überschreitung ab.

Es handelt sich hierbei also sozusagen um eine Zinsobergrenze, die den Besitzer des Caps vor zu hohen Zinszahlungen schützen soll.

Beispiel: Ein Kreditnehmer vereinbart mit seiner Bank, dass der Zinssatz an den 6-monatigen LIBOR-Zinssatz angepasst wird, d.h. die Höhe der Verzinsung seines Kredits ändert sich alle 6 Monate. Diese Zeitspanne nennt man auch „Tenor", $\delta_k = t_{k+1} - t_k$. Da der Kreditnehmer nicht möchte, dass der Zins ein gewisses Niveau übersteigt, erwirbt er einen Zinscap. Liegt nun zu irgendeinem Zeitpunkt $t_k, k \in [1, T]$, der variable Zinssatz R_k über der Cap Rate R_K, so bekommt der Kreditnehmer zum nächsten Auszahlungszeitpunkt die Differenz bezüglich des Nominalbetrages L zurückbezahlt.

Man beachte, dass eine Überschreitung der Cap Rate durch den variablen Zinssatz im Zeitpunkt des Erwerbs des Caps üblicherweise nicht zu einer Auszahlung führt.

Zinscap als Portfolio von Zinsoptionen

Sei T die Laufzeit eines Zinscaps mit Anpassungszeitpunkten $t_1, ..., t_n$ und $t_{n+1} = T$, L der Nomialbetrag, R_K die Cap Rate und R_k der zur Zeit t_k beobachtete und für das Intervall $[t_k, t_{k+1})$ gültige LIBOR-Zinssatz. Dann liefert der Cap zum Zeitpunkt t_{k+1} folgende Ausschüttung:

$$L\delta_k \max(R_k - R_K, 0)$$

Dies entspricht einer Kaufoption auf den zur Zeit t_k beobachteten LIBOR-Satz und wird als *Caplet* bezeichnet.

Ein Zinscap kann als ein aus n solchen Caplets bestehendes Portfolio betrachtet werden.

Zinsfloor

Ein Zinsfloor wird analog zu einem Cap definiert:

Definition: Ein <u>Zinsfloor</u> ist ein Finanzinstrument, dessen Ausschüttung nur dann eintritt, wenn ein variabler Zinssatz R_k einen bestimmten Wert R_K unterschreitet. Die Höhe der Ausschüttung hängt dann von der Höhe der Unterschreitung ab.

Hierbei handelt es sich also um eine Zinsuntergrenze, die den Besitzer vor Einbußen durch einen zu niedrigen Zinssatz bewahren soll.

Mit der gleichen Notation wie bei einem Zinscap führt der Floor im Zeitpunkt $t_{k+1}, k = 1, 2, ..., n$ zu einer analogen Ausschüttung:

$$L\delta_k \max(R_K - R_k, 0)$$

Dies entspricht einer Verkaufsoption auf den zur Zeit t_k beobachteten LIBOR-Satz und wird als *Floorlet* bezeichnet.

Collar

Ein Zinscollar besteht aus der Kombination eines Caps mit einem Floor. Er dient also dazu einen Zinssatz zwischen 2 Werten zu halten. Meist nimmt man beim Cap die long-Position und beim Floor die short-Position ein: ist der Zinssatz zu hoch bekommt man die Differenz, ist er zu niedrig bezahlt man sie.
Üblicherweise ist der Collar so gestaltet, dass Cap und Floor zu Beginn den gleichen Preis haben, also keine Kosten für den Einstieg in den Collar anfallen.

Put-Call-Parität für Cap und Floor

Im folgenden haben alle Finanzinstrumente dieselbe Laufzeit und dieselben Anpassungstermine: Haben ein Zinscap und Zinsfloor dieselbe Cap Rate R_K, dann gilt mit einem Swap, der zum Erhalt des LIBOR-Satzes gegen die Zahlung eines fixen Zinssatzes R_K berechtigt:

$$\text{Wert des Caps - Wert des Floors} = \text{Wert des Swaps}$$

Beweis:

Nimmt man eine long-Position im Cap und eine short-Position im Floor ein, so ergeben sich folgende Zahlungsströme:

Swap:	(LIBOR$-R_K$)	für jeden Zeitpunkt
Cap:	(LIBOR$-R_K$)	für LIBOR$> R_K$
Floor:	$-(R_K-$LIBOR$) =$ (LIBOR$-R_K$)	für $R_K >$LIBOR
$\Rightarrow$ Cap+Floor:	(LIBOR$-R_K$)	für jeden Zeitpunkt

Der Swap weist also den gleichen Zahlungsstrom auf, wie der Cap und der Floor zusammen. Auf Grund der unterschiedlichen Positionen, die für den Cap und den Floor eingenommen werden, ergibt sich für den Wert des Floors das negative Vorzeichen. Also gilt die Put-Call-Parität.

Bewertung von Caps und Floors

Gemäß den vorangegangenen Abschnitten bietet ein Cap für den zum Zeitpunkt t_k beobachteten Zinssatz zum Zeitpunkt t_{k+1} eine Auszahlung von $L\delta_k \max(R_k - R_K, 0)$.
Sei nun der zum Zeitpunkt k beobachtete Zins R_k logarithmisch normalverteilt mit der Volatilität σ_k, so ergibt sich für ein Caplet bzw. analog für ein Floorlet folgende Formel:

$$L\delta_k P[0, t_{k+1}](F_k\Phi(d_1) - R_K\Phi(d_2)) \tag{2.11}$$

$$L\delta_k P[0, t_{k+1}](R_K\Phi(-d_2) - F_k\Phi(-d_1)) \tag{2.12}$$

$$\text{mit } d_{1,2} = \frac{1}{\sigma_k\sqrt{t_k}}(\ln(\frac{F_k}{R_K}) \pm \frac{1}{2}\sigma_k^2 t_k),$$

wobei F_k die sogenannte Forward Rate bezeichnet. Dabei handelt es sich um jenen Zinssatz der aus heutiger Sicht für den Zeitabschnitt von t_k bis t_{k+1} gelten wird ($F_k = E[R_k]$).

Der Wert eines Caps/Floors ist also die Summe aller Caplets/Floorlets, von denen jedes seperat zu berechnen ist.

Bemerkung: Man verwendet entweder für jedes einzelne Caplet/Floorlet unterschiedliche Volatilitäten (Spot-Volatilität) oder für alle dieselbe, die dann allerdings abhängig von der Laufzeit des Caps/Floors variiert (Flat-Volatilität).

Theoretische Begründung

Mit der Annahme einer risikoneutralen Welt gelangen wir zu folgenden Ergebnissen:

1) Der Preis eines Caplets, das eine Auszahlung zum Zeitpunkt t_{k+1} bietet, beträgt $L\delta_k P[0, t_{k+1}]E[\max(R_k - R_K, 0)]$.

2) Der Erwartungswert des Zinssatzes, der zum Zeitpunkt t_k gilt, ist gleich der Forward Rate: $E[R_k] = F_k$.

Da der beobachtete Zinssatz als logarithmisch normalverteilt angenommen wird, erhält man die Formeln (2.11) und (2.12) zur Bewertung eines Caplets, indem man auf den Preis des Caplets (Punkt 1) Gleichung (2.3) anwendet und die Forward Rate (Punkt 2) einsetzt. Dazu kommt natürliche eine analoge Vorgehensweise für ein Floorlet.
Man kann also den heutigen Zinssatz zur Diskontierung verwenden, wenn man außerdem den erwarteten Zinssatz gleich der Forward Rate setzt.

2.4 Swaption[3]

Definition: Eine Swaption ist eine Option auf einen Zinsswap. Ihrem Inhaber verleiht sie das Recht, nicht die Pflicht, zu einem gewissen Zeitpunkt in einen Zinsswap einzusteigen.

Beispiel: Eine Firma nimmt in 6 Monaten einen Kredit mit variabler Verzinsung auf. Eigentlich würde sie aber lieber konstante Zahlungen abgeben. Dieses Problem kann die Firma durch einen Swap lösen. Da das Vertragsverhältnis aber nicht sofort, sondern erst in 6 Monaten beginnt, steigt das Unternehmen gegen eine Prämie in eine Swaption ein, die ihm die Möglichkeit gibt, zu Vertragsbeginn in einen Swap mit konstanten Zinsen von 8% einzusteigen. 6 Monate später erkundigt sich die Firma über aktuelle Swaps. Betragen deren geforderte konstante Zinszahlungen weniger bzw. mehr als 8%, so wird das Unternehmen die Swaption verfallen lassen bzw. ausüben.

Bemerkung:

- Die Laufzeiten der in Frage kommenden Swaps und des Kredits müssen übereinstimmen.
- Alternativ zur Swaption gibt es auch den sogenannten Forward-Swap, bei dem keine Prämie verlangt wird, der dafür aber den Inhaber dazu **verpflichtet** in den Swap einzusteigen.

Bewertung von europäischen Swaptions

Sei die Swap Rate s_T - das ist jener konstante Zinssatz, der in einem zur Zeit T emittierten Swap, für eine bestimmte Laufzeit n und m Auszahlungsterminen pro Jahr, mn-mal gegen den LIBOR-Satz getauscht werden kann - zur Fälligkeit der Swaption logarithmisch normalverteilt mit Volatilität σ.
Sei weiter s_K der in der Swaption vereinbarte konstante Zinssatz und L das Nominalkapital. Vergleicht man die Zahlungsströme eines Swaps mit konstanten Zinsen s_T mit jenen eines Swaps mit konstanten Zinsen s_K, so erhält man als Auszahlung einer Swaption, bei der man konstante Zahlungen tätigt bzw. bekommt, für einen bestimmten Zeitpunkt:

$$\frac{L}{m}\max(s_T - s_K, 0)$$

bzw.

$$\frac{L}{m}\max(s_K - s_T, 0).$$

Bezeichnen nun $T_1, T_2, ..., T_{mn}$ die Auszahlungstermine über die gesamte Laufzeit, so folgt der Wert der Swaption als Summe der Zahlungsströme zu den einzelnen Auszahlungsterminen:

$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P[0, T_i](s_0\Phi(d_1) - s_K\Phi(d_2)) \tag{2.13}$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P[0, T_i](s_K\Phi(-d_2) - s_0\Phi(-d_1)), \tag{2.14}$$

$$\text{mit } d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln(\tfrac{s_0}{s_K}) \pm \tfrac{1}{2}\sigma^2 T),$$

wobei s_0 die Forward Swap Rate - also den zum Zeitpunkt 0 erwarteten konstanten Zins, eines zum Zeitpunkt T emittierten Swaps - bezeichnet.

Man definiert die sogenannte *Annuität* A als den Wert des Kontrakts, der $\frac{1}{m}$ zu den Zeitpunkten $T_i (1 \leq i \leq mn)$ bezahlt, also $A = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{mn} P[0, T_i]$. So vereinfacht sich die Darstellung des Werts der Swaption zu:

$$LA(s_0\Phi(d_1) - s_K\Phi(d_2)) \tag{2.15}$$

bzw.

$$LA(s_K\Phi(-d_2) - s_0\Phi(-d_1)). \tag{2.16}$$

Theoretische Begründung

Mit der Annahme einer risikoneutralen Welt gelangen wir zu folgenden Ergebnissen:

1) Der Wert einer Swaption beträgt $LAE[\max(s_T - s_K, 0)]$

2) Die für den Zeitpunkt T erwartete Swap Rate s_T ist gleich der Forward Swap Rate: $E[s_T] = s_0$

Da der erwartete konstante Zinssatz eines zum Zeitpunkt T emittierten Swaps als logarithmisch normalverteilt angenommen wird, erhält man die Formeln (2.17) und (2.18) zur Bewertung einer Swaption, indem man auf den Wert einer Swaption (Punkt 1) Gleichung (2.3) anwendet und die Forward Swap Rate (Punkt 2) einsetzt. Dazu kommt natürliche eine analoge Vorgehensweise für eine Swaption, bei der konstanter und variabler Zins umgekehrt getauscht werden.
Man kann also Zinssätze zur Diskontierung als konstant betrachten, wenn man außerdem die erwartete Swap Rate gleich der Forward Swap Rate setzt.

2.5 Resümee

Jedes der drei vorgestellten Modelle ist (für sich allein) in sich konsistent. Dies gilt allerdings nicht untereinander, da immer nur einer der drei zukünftigen Werte - der Anleihepreis, die Spot Rate oder die Swap Rate - als logarithmisch normalverteilt angenommen werden kann.

Das Black-Modell findet eine breite Anwendung für Zinscaps (und -floors), europäische Anleiheoptionen sowie europäische Swaptions. Keine Berücksichtigung im Modell findet allerings die Veränderlichkeit von Zinssätzen, was auch der Grund dafür ist, wieso es zur Bewertung amerikanischer Swaptions, strukturierter Anleihen und Callable Bonds nicht geeignet ist.

Möglichkeiten um auch solche Finanzinstrumente zu bewerten, werden im nächsten Abschnitt mit sogenannten Zinsstrukturmodellen behandelt.

[3] Abschnitte 2.2: „Anleiheoptionen“, 2.3: „Zinscap und Zinsfloor“ und 2.4: „Swaption“ folgen [JH, Kapitel 26]

Kapitel 3

Short-Rate-Modelle

3.1 Short Rate[4]

Definition: Der Zinssatz r, der zum Zeitpunkt t für einen unendlich kleinen Zeitabschnitt gilt, heißt Short Rate oder momentaner kurzfristiger Zinssatz.

Wir betrachten die Short Rate in einer risikoneutralen Welt, d.h. in einem sehr kurzen Intervall $[t, t + \Delta t]$ kann im Mittel $r(t)\Delta t$ erwirtschaftet werden.

Sei $\overline{r}$ der durchschnittliche Wert von r über das Zeitintervall $[t, T]$, $R(t, T)$ der Zinssatz zum Zeitpunkt t bei stetiger Verzinsung für eine Periode $T - t$ und $P[t, T]$ wie zuvor der Preis einer Nullkupon-Anleihe zur Zeit t, die zum Zeitpunkt T den Betrag 1 ausbezahlt. Dann gilt:

$$E[e^{-\overline{r}(T-t)}] = P[t, T] = E[e^{-R(t,T)(T-t)}]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$R(t, T) = -\frac{1}{T - t}\ln(E[e^{-\overline{r}(T-t)}]) \tag{3.1}$$

Gesucht werden also Modelle, die den Prozess von r darstellen. Hat man diesen Prozess nämlich vollständig bestimmt, so kann man mit Hilfe von Gleichung (3.1) jeden Zinssatz für jede Laufzeit und jeden Zeitpunkt berechnen.

Man brauch also Short-Rate-Modelle:

3.2 Gleichgewichtsmodelle[4]

Gleichgewichtsmodelle beginnen normalerweise mit Annahmen über ökonomische Variablen, leiten einen Prozess für die Short Rate r her und untersuchen dann, was aus dem Prozess für die Anleihen- und Optionspreise folgt.

Grundsätzlich wird der Prozess von r durch einen It$\hat{o}$-Prozess der Form

$$dr = m(r)dt + s(r)dz \tag{3.2}$$

beschrieben. Dabei bezeichnet $m(r)$ die momentane Drift, einen Richtwert für den Zuwachs von r, und $s(r)$ die momentane Standardabweichung. m und s hängen zwar von r ab, sind aber zeitunabhängig.
Ein Ein-Faktor-Modell, also ein Modell das nur von einer Variablen abhängt, ist weniger einschränkend, als man meinen sollte. Zwar können sich Zinssätze in einem beliebig kurzen Intervall nur in dieselbe Richtung ändern, um welchen Betrag ist jedoch offen.

3.2.1 Rendleman-Bartter-Modell

Der Prozess von r ist mit $m(r) = \mu r$ und $s(r) = \sigma r$ gegeben durch

$$\mathrm{d}r = \mu r\ \mathrm{d}t + \sigma r\ \mathrm{d}z,$$

wobei μ und σ Konstanten sind.
Der Prozess folgt einer geometrischen Brownschen Bewegung und kann durch einen Binomialbaum dargestellt werden.

Hier wird angenommen, dass sich kurzfristige Zinssätze wie Aktienkurse verhalten. Dabei handelt es sich um einen natürlichen Ansatz, der allerdings nicht optimal ist. Zinssätze tendieren im Laufe der Zeit erfahrungsgemäß zu einem langfristigen Durchschnittsniveau. Dieses Phänomen bezeichnet man als *Mean Reversion* oder Mittelwerttendenz.
Es gibt auch zwingende ökonomische Gründe dafür, warum Mean Reversion existiert: Ist der Zins zu hoch, so wird die Wirtschaft gebremst, die Nachfrage sinkt, also fällt der Zins. Ist hingegen der Zins zu niedrig, so nimmt das Ganze den umgekehrten Verlauf.

Die Nicht-Berücksichtigung von Mean Reversion im Rendleman-Bartter-Modell stellt ein großes Manko dar.

3.2.2 Vasicek-Modell

Hier lautet der Prozess für r mit $m(r) = a(b - r)$ und $s(r) = \sigma$

$$\mathrm{d}r = a(b - r)\ \mathrm{d}t + \sigma\ \mathrm{d}z,$$

wobei a,b und σ Konstanten sind.

Der Vorteil dieses Modells liegt darin, dass es Mean Reversion berücksichtigt. Die Short Rate r wird von a auf ein Niveau b hingezogen.

Der Nachteil besteht darin, dass die Short Rate in ungüstigen Fällen negativ werden kann.

Sobald a, b und σ bekannt sind, ist $R(t)$ nur noch von $r(t)$ linear abhängig, also die Zinsstrukturkurve vollständig beschreibbar. Diese ist entweder nach oben oder unten geneigt oder ist mit einem Hügel versehen.

3.2.3 Das Modell von Cox, Ingersoll und Ross

Der Prozess von r ist mit $m(r) = a(b - r)$ und $s(r) = \sigma\sqrt{r}$ gegeben durch

$$\mathrm{d}r = a(b - r)\ \mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r}\ \mathrm{d}z,$$

Dieses Modell weist dieselbe Drift wie das Vasicek-Modell auf, berücksichtigt also auch Mean Reversion, allerdings ist die Standardabweichung der Veränderung der Short Rate proportional zu $\sqrt{r}$.
Die Zinsstrukturkurve kann steigend, sinkend oder gekrümmt sein.
Auch hier ist $R(t)$ linear abhängig von $r(t)$. Der Wert von $r(t)$ bestimmt also das Niveau der Zinsstrukturkurve zum Zeitpunkt t, nicht allerdings die grundsätzliche Form, die von t abhängt.

Wichtig ist, dass die Short Rate hier nicht negativ werden kann.

3.2.4 2-Faktor-Modelle

Es wurden auch einige Versuche mit 2 Faktoren unternommen:

- Brennan-Schwartz-Modell: Der Prozess der Short Rate r tendiert zu einem langfristigen Zinssatz R, der wiederum einem stochastischen Prozess folgt.
- Longstaff-Schwartz-Modell: Hier wird von einem allgemeinen Gleichgewichtsmodell für die Ökonomie ausgegangen und dann ein Zinsstrukturmodell mit stochastischer Volatilität abgeleitet. Das Modell erweist sich als gut handhabbar.

3.3 No-Arbitrage-Modelle[4]

Ein Nachteil der Gleichgewichtsmodelle besteht darin, dass sie nicht automatisch an die anfängliche Zinsstruktur angepasst sind. Zwar ist dies durch eine geschickte Wahl der Parameter annähernd zu erreichen, jedoch wirken sich bereits kleine Fehler an dieser Stelle sehr stark auf die späteren Bewertungen von Finanzinstrumenten aus. Daher ist das Vertrauen in die Preise, die von den Modellen geliefert werden, eher gering.

Im Gegensatz dazu stimmen No-Arbitrage-Modelle exakt mit der aktuellen Zinsstruktur überein. Die aktuelle Zinsstruktur ist hier sozusagen ein Modell-Input, wogegen sie bei den Gleichgewichtsmodellen einen Modell-Output darstellt.

Die momenate Drift $m(r)$ hängt bei Gleichgewichtsmodellen nicht, bei No-Arbitrage-Modellen allerdings sehr wohl von der Zeit ab. Dies liegt daran, dass die anfängliche Form der Kurve den weiteren Pfad bestimmt.

Die folgenden Modelle wurden von Gleichgewichtsmodellen in No-Arbitrage-Modelle übergeleitet, indem die Drift des kurzfristigen Zinssatzes zeitabhängig modelliert wurde.

3.3.1 Ho-Lee-Modell

Das Modell wird in Form eines Binomialbaums von Anleihepreisen mit zwei Parametern ausgeführt: Erstens die momentane Standardabweichung der Short Rate σ, die konstant ist, und zweitens der Marktpreis des Risikos der Short Rate $\theta(t)$. Das Modell konvergiert in stetiger Zeit gegen

$$\mathrm{d}r = \theta(t)\ \mathrm{d}t + \sigma\ \mathrm{d}z.$$

Dabei ist $\theta(t)$ eine Funktion der Zeit, die so gewählt wird, dass das Modell an die anfängliche Zinsstruktur angepasst ist. Außerdem gibt $\theta(t)$ die mittlere Richtung an, in die sich r zum Zeitpunkt t bewegt, unabhägig von der Höhe von r.

$\theta(t)$ kann analytisch berechnet werden als

$$\theta(t) = F_t(0,t) + \sigma^2 t, \tag{3.3}$$

wobei $F(0,t)$ die momentane Forward Rate mit Fälligkeitstermin t zum Zeitpunkt 0 ist. Der Index t bezeichnet die partielle Ableitung. Näherungsweise gilt $\theta(t) = F_t(0,t)$. Daher folgt auch die durchschnittliche Richtung, in die sich die Short Rate bewegt, näherungsweise der momentanen Forward-Kurve. Diese wird jedoch von normalverteilten Größen überlagert.

3.3.2 Ein-Faktor-Modell von Hull-White

Bei diesem Modell handelt es sich um eine Erweiterung des Vasicek-Modells mit der, bei No-Arbitrage-Modellen ja bekanntlich üblichen, exakten Anpassung an die anfängliche Zinsstruktur:

$$\mathrm{d}r = [\theta(t) - ra]\ \mathrm{d}t + \sigma\ \mathrm{d}z = a[\tfrac{\theta(t)}{a} - r]\ \mathrm{d}t + \sigma\ \mathrm{d}z,$$

wobei a und σ Konstante sind.

Man kann das Hull-White-Modell auch als Ho-Lee-Modell mit Mean Reversion oder als Vasicek-Modell mit zeitabhängigem Reversionsniveau betrachten. Auf jeden Fall ist gut erkennbar, dass das Hull-White-Modell für $a = 0$ dem Ho-Lee-Modell entspricht, dieses also ein Spezialfall des Hull-White-Modells ist.

Auch dieses No-Arbitrage-Modell ist analytisch gut handhabbar. $\theta(t)$ kann folgendermaßen berechnet werden:

$$\theta(t) = F_t(0,t) + aF(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \tag{3.4}$$

Wenn man den letzten Term, der sehr klein ist, vernachlässigt, bekommt man $F_t(0,t) + a[F(0,t) - r]$ als Driftrate des Prozesses für r zum Zeitpunkt t. Auch hier folgt also r im Mittel der Steigung der anfänglichen Forward Rate-Kurve, allerdings haben wir hier zusätzlich noch Mean Reversion. Weicht r von der Kurve ab, kehrt es mit der Rate a wieder zurück.

Ein Nachteil dieses Modells liegt logischerweise wie beim Vasicek-Modell darin, dass die Short Rate negativ werden kann.

3.3.3 Black-Karasinski-Modell

Im Gegensatz zu den beiden Modellen zuvor besteht bei dem von Black und Karasinski entworfenen Modell

$$\mathrm{d}\ \ln r = [\theta(t) - a(t)\ln r]\ \mathrm{d}t + \sigma(t)\ \mathrm{d}z$$

die Möglichkeit nicht, dass die Short Rate negativ wird.

Nachteilig wirkt sich jedoch aus, dass bei diesem Modell der zukünftige Wert der Short Rate r nicht nomalverteilt wie bei Ho-Lee und Hull-White, sondern logarithmisch normalverteilt ist. Daher erweist sich das Modell als analytisch schlecht handhabbar.

3.3.4 Zwei-Faktor-Modell von Hull-White

Dieses Modell beruht auf einer ähnlichen Idee wie das Gleichgewichtsmodell mit zwei Faktoren von Brennan und Schwartz:

$$\mathrm{d}f(r) = [\theta(t) + u - af(r)]\ \mathrm{d}t + \sigma_1\ \mathrm{d}z_1$$

Dabei ist die Zufallsvariable u eine Komponente des Revisionsniveaus von r, kehrt mit einer Rate b auf den Wert 0 zurück und folgt dem Prozess

$$\mathrm{d}u = -bu\ \mathrm{d}t + \sigma_2\ \mathrm{d}z_2.$$

a, b, σ_1 und σ_2 sind Konstanten, $\mathrm{d}z_1$ und $\mathrm{d}z_2$ Wiener Prozesse mit der momentanen Korrelation ρ. $\theta(t)$ ist so zu wählen, dass das Modell mit der anfänglichen Zinsstruktur konsistent ist.

Dieses Modell erlaubt im Gegensatz zu Ein-Faktor-Modellen umfangreichere Zinsstrukturbewegungen und Volatilitätsstrukturen für r.

3.4 Zinsbäume[4]

Ein Zinsbaum ist eine zeitdiskrete Darstellung des stochastischen Prozesses der Short Rate r, ähnlich wie Aktienkursbäume die Entwicklung von Aktienkursen beschreiben.

Wenn ein Zeitschritt im Baum die Länge Δt hat, handelt es sich bei den Zinssätzen im Baum um stetige Zinssätze für das Zeitintervall Δt.
Eine übliche Annahme bei der Konstruktion von Zinsbäumen ist, dass der Zinssatz R für den Zeitabschnitt Δt dem selben Prozess folgt, wie r im entsprechenden zeitstetigen Modell.

Der wesentliche Unterschied zwischen Aktienkursbäumen und Zinsbäumen besteht darin, dass für Aktienkursbäume zumeist ein und derselbe Zinssatz zur Diskontierung an allen Knoten des gesamten Baumes verwendet wird, wogegen bei Zinsbäumen in jedem einzelnen Knoten der Diskontierungssatz variiert.
Außerdem verwendet man für Zinsbäume meist einen Trinomialbaum, anstatt eines Binomialbaumes, da man dadurch einen Freiheitsgrad mehr zur Verfügung hat und so Eigenschaften wie Mean Reversion besser berücksichtigen kann.

Die übliche Verzweigung eines Trinomialbaumes besteht logischerweise aus einem aufsteigenden, einem gleichbleibenden und einem fallenden Ast (Eins-aufwärts-,Geradeaus- und Eins-abwärts-Verzweigung).
Alternativen dazu sind unter anderem die „Zwei-aufwärts-, Eins-aufwärts und Geradeaus-Verzweigung“, sowie die „Geradeaus-, Eins-abwärts- und Zwei-abwärts-Verzweigung“. Diese alternativen Verzweigungen erweisen sich zur Berücksichtigung von Mean Reversion bei sehr hohen bzw. niedrigen Zinssätzen als vorteilhaft.

3.4.1 Verfahren zur Konstruktion von Zinsbäumen

Gezeigt wird das Verfahren anhand des Hull-White-Modells

$$\mathrm{d}r = [\theta(t) - ar]\ \mathrm{d}t + \sigma\ \mathrm{d}z.$$

Wie das Resultat dann auf andere Modelle verallgemeinert werden kann, folgt später.

Der erste Schritt

Ein Zeitschritt im Baum sei Δt und der Zinssatz R folge für ein Intervall Δt dem selben Prozess wir r, also:

$$\mathrm{d}R = [\theta(t) - aR]\ \mathrm{d}t + \sigma\ \mathrm{d}z$$

Dies ist durchaus sinnvoll, wenn Δt gegen 0 geht.

Der erste Schritt besteht nun darin, einen Baum für eine Variable R^* zu konstruieren, die zu Beginn 0 ist und dem Prozess

$$\mathrm{d}R^* = -aR^*\ \mathrm{d}t + \sigma\ \mathrm{d}z$$

folgt.
Sei ΔR die Veränderung eines Zinssatzes von einem Knoten zum nächsten bei einer einfachen Aufwärts- oder Abwärtsbewegung.
Das Paar (i, j) bezeichne jenen Knoten im Baum, für den $t = i\Delta t$ und $R^* = j\Delta R$ gilt, mit $i \in N_0$ und $j \in Z$.
Grundsätzlich wird in jedem Knoten des gesamten Baumes die gewöhnliche, oben beschriebene, Verzweigung verwendet, allerdings ist darauf zu achten, dass an allen Knoten jeder Ast eine positive Eintrittswahrscheinlichkeit besitzt. Werden Zinssätze sehr groß bzw. klein so sollte man die Verzweigung wechseln:
Es sei j_{max} bzw. j_{min} jener Wert, bei dessen Überschreitung bzw. Unterschreitung durch j, zur „Geradeaus-, Eins-abwärts- und Zwei-abwärts-Verzweigung“ bzw. zur „Zwei-aufwärts-, Eins-aufwärts und Geradeaus-Verzweigung“ gewechselt wird, um Mean Reversion zu berücksichtigen.

Das Inkrement $R^*(t + \Delta t) - R^*(t)$ ist normalverteilt. Vernachlässigt man Terme höherer Ordnung als Δt, so ist $-aR^*(t)\Delta t$ der Erwartungswert und $\sigma^2\Delta t$ die Varianz des Inkrements.

Sei p_u die Wahrscheinlichtkeit an einem Knoten, dass die höchste Verzweigung eintritt, die vom Knoten ausgeht, sowie p_m jene für die mittlere Verzweigung und p_d jene für die niedrigste Verzweigung. Diese Wahrscheinlichkeiten werden auf die erwartete Änderung und die Varianz der Änderung in R^* über Δt kalibriert. Außerdem muss die Summe der drei Wahrscheinlichkeiten natürlich eins ergeben. Dies führt zu drei Gleichungen mit drei Unbekannten.
So erhält man zum Beispiel für die normale Verzweigung folgende Gleichungen:

$$p_u\Delta R - p_d\Delta R = -aj\Delta R\Delta t$$
$$p_u\Delta R^2 + p_d\Delta R^2 = \sigma^2\Delta t + a^2 j^2\Delta R^2\Delta t^2$$
$$p_u + p_m + p_d = 1$$

Durch lösen des LGS erhält man Werte für die drei Wahrscheinlichkeiten, die nur noch von j, also der Höhe des Zinssatzes, abhängen. Das bedeutet, alle Knoten $(i, j), i \geq 0$, mit fixem j weisen das gleich Wahrscheinlichkeitstripel auf.

Nun kann der Baum für R^* aufgestellt werden. Es fällt auf, dass der Baum symmetrisch ist und auch die Wahrscheinlichkeiten Spiegelbilder sind, d.h. an zwei Knoten (i, j) und $(i, -j)$ für beliebige, aber fixe i, j gilt $p_{u_1} = p_{d_2},\ p_{m_1} = p_{m_2}$ und $p_{d_1} = p_{u_2}$.

Der zweite Schritt

Beim zweiten Schritt der Konstruktion eines Zinsbaumes handelt es sich um die Transformation des Baumes für R^* in einen Baum für R. Dazu müssen die Knoten so verschoben werden, dass die anfängliche Zinsstruktur exakt wiedergegeben wird. Dafür definieren wir die folgenden Variablen:

> $\alpha(t) = R(t) - R^*(t)$ sei die Differenz aus den zusammengehörenden Zinssätzen aus dem R Baum und dem R^* Baum und $\alpha_i = \alpha(i\Delta t)$.
> $Q_{i,j}$ sei der Barwert eines Wertpapiers, das bei Erreichen des Knotens (i, j) einen Betrag von 1 ausbezahlt.

Die α_i und $Q_{i,j}$ sind mit einem vorwärts gerichteten Verfahren so zu berechnen, dass die anfängliche Zinsstruktur exakt wiedergegeben wird.

- $Q_{0,0} = 1$ ist klar.
- $\alpha_0 + R^*(0) = \alpha_0$ muss mit dem momentan für die Laufzeit Δt geltenden Zinssatz $R(0)$ übereinstimmen, ist also aus einer Tabelle für aktuelle Zinssätze ablesbar.
- $Q_{1,1} = p_u e^{-R_0 \Delta t}$ gilt nach der Definition des Barwerts. Analog erhält man $Q_{1,0}$ bzw. $Q_{1,-1}$ durch die Verwendung von p_m bzw. p_d.
- α_1 muss so gewählt werden, dass sich der korrekte Preis einer in $2\Delta t$ fälligen Nullkupon-Anleihe ergibt. In den Knoten (1,1), (1,0) und (1,-1) ergeben sich die Werte $e^{-\alpha_1+\Delta R}$, $e^{-\alpha_1}$ und $e^{-\alpha_1-\Delta R}$. Der Preis vom Anfangsknoten (0,0) aus gesehen, beträgt also die Summe dieser Preise mal der Wahrscheinlichkeit, dass die Knoten erreicht werden und der Diskontierung. Dies muss dann mit der anfänglichen Zinsstruktur übereinstimmen, was abgelesen werden kann:
$$Q_{1,1}e^{-\alpha_1+\Delta R} + Q_{1,0}e^{-\alpha_1} + Q_{1,-1}e^{-\alpha_1-\Delta R} = e^{-2r_{2\Delta t}},$$
wobei r_i die für i Jahre geltende Spot Rate ist, hier gilt $i = 2\Delta t$. Somit kann α_1 berechnet werden.
- $Q_{2,2}, Q_{2,1}, Q_{2,0}, Q_{2,-1}$ und $Q_{2,-2}$ können als nächstes berechnet werden.

  ⋮
- Sind die $Q_{i,j}, i \leq m, m \geq 0$, bereits bestimmt, so kann im nächsten Schritt α_m so bestimmt werden, dass der Baum eine zu $(m+1)\Delta t$ fällige Nullkupon-Anleihe richtig bewertet:
Am Knoten (m, j) gilt der Zinssatz $\alpha_m + j\Delta R (= \alpha_m + R^* = R)$.
Sei n_m die Anzahl der Knoten zu beiden Seiten des zentralen Knotens in $m\Delta t$ und P_m der Preis einer zur Zeit $m\Delta t$ fälligen Nullkupon-Anleihe, dann gilt:
$$\alpha_m = \frac{\ln \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-j\Delta R \Delta t} - \ln P_{m+1}}{\Delta t}, \tag{3.5}$$
wobei P_{m+1} mit Hilfe einer Spot Rate Tabelle berechenbar ist und alles andere bekannt sein sollte.

- Nachdem jetzt α_m bekannt ist, können die $Q_{i,j}$ für $i = m + 1$ berechnet werden:

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k}\ q(k,j) e^{-(\overbrace{\alpha_m + k\Delta R}^{R})\Delta t}, \tag{3.6}$$

  wobei $q(k, j)$ die Wahrscheinlichkeit für die Bewegung vom Knoten (m, k) zum Knoten $(m + 1, j)$ beschreibt.
  Die Summation erfolgt über alle k, für die $q(k, j)$ nicht 0 ist.

Erweiterung auf andere Modelle

Auch für Modelle der Form

$$\mathrm{d}f(r) = [\theta(t) - af(r)]\ \mathrm{d}t + \sigma\ \mathrm{d}z$$

folgt R dem selben Prozess wie r

$$\mathrm{d}f(R) = [\theta(t) - af(R)]\ \mathrm{d}t + \sigma\ \mathrm{d}z.$$

Zur Konstruktion eines Zinsbaumes setzt man $x = f(R)$. Dann folgt auch x dem Prozess

$$\mathrm{d}x = [\theta(t) - ax]\ \mathrm{d}t + \sigma\ \mathrm{d}z.$$

- 1. Schritt: Man konstruiert einen Baum für x^*, das dem gleichen Prozess wie x mit $\theta(t) = 0$ folgt und dessen Anfangswert 0 beträgt.
- 2. Schritt: Die Knoten zum Zeitpunkt $i\Delta t$ werden um α_i verschoben um eine exakte Anpassung an die anfänglich Zinsstruktur zu erreichen.
- Die Formeln für α_m und $Q_{i,j}$ müssen angepasst werden, die grundsätzliche Notation bleibt erhalten:
  Sei g die Inverse von f, sodass $g(\alpha_m + j\Delta x)$ der Zinssatz für den Zeitraum Δt am Knoten (m,j) ist. Dann gilt für den Preis der Nullkupon-Anleihe:

$$P_{m+1} = \textstyle\sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-g(\alpha_m + j\Delta x)\Delta t}$$

  Für $m = 0$ gilt $\alpha_0 = f(R(0))$.
  Für $m > 0$ ist ein numerisches Verfahren notwendig, um die Gleichung nach α_m auflösen zu können.

  Ist α_m bekannt, kann der nächste Schritt wie folgt gelöst werden:

$$Q_{m+1,j} = \textstyle\sum_k Q_{m,k} q(k,j) e^{-g(\alpha_m + k\Delta x)\Delta t}.$$

Die Wahl von $f(r)$

Wählt man $f(r) = r$, so erhält man das Hull-White Modell:

- Vorteil: Das Modell ist analytisch gut handhabbar.
- Nachteil: Es besteht die Möglichkeit, dass eine negative Short Rate auftritt. Dies ist zwar sehr unwahrscheinlich, trotzdem wird das Modell von Analysten abgelehnt.

Wählt man $f(r) = \ln r$, so erhält man das Black-Karasinski-Modell:

- Nachteil: Das Modell ist analytisch nicht lösbar.
- Vorteil: Die Short Rate ist stets nicht negativ, außerdem wählen Händler lieber Werte für die Volatilität aus einem logarithmisch normalverteilten Modell, als aus einem gewöhnlich normalverteilten.

Bei niedrigen Zinssätzen treten gewisse Probleme auf. Im Hull-White-Modell kann dann das Auftreten negativer Short Rates nicht mehr vernachlässigt werden, wenn die anfängliche Short Rate bereits sehr niedrig ist.
Bei Black-Karasinski kann dies dazu führen, dass bei kleinen r eine viel höhere Volatilität auftritt, als bei großen. Liegt die Short Rate unter 1%, so kann eine Volatilität von 100% zutreffend sein.

Ein scheinbar gut funktionierendes Modell besteht in einer Wahl für $f(r)$ so, dass die Zinssätze für $r < 1\%$ logarithmisch normalverteilt und für $r > 1\%$ normalverteilt sind.

[4] Abschnitte 3.1: „Short Rate“, 3.2: „Gleichgewichtsmodelle“, 3.3: „No-Arbitrage-Modelle“ und 3.4: „Zinsbäume“ folgen [JH, Kapitel 28]

Literaturverzeichnis

[JH] John Hull (2006): Optionen, Futures und andere Derivate *Pearson Studium*

[DL] David G. Luenberger (1998): Investment science *Oxford Univ. Press*