

TU Wien

Zinstheorie in der Versicherung

Seminar aus Finanz- und Versicherungsmathematik
Reinhold Kainhofer

von
Lisa Hütthaler
0626727
Jänner 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Bewertung mit Risikostreuung	3
2.1	Das Gesetz der großen Zahlen	3
2.2	Aufzinsungs- und Diskontierungsfaktoren	5
2.3	Der Verlust des Versicherers und das Äquivalenzprinzip	6
3	Anleihen	8
3.1	Nullkuponanleihe	8
3.2	Eine allgemeine Anleihe	8
4	Hedgen	10
4.1	Ein Portfolio von Erlebensfallversicherungen hedgen	10
4.2	Ein Portfolio von Risikoversicherungen hedgen	11
4.3	Hedgen und Erreichbarkeit	13
5	Rendite	14
6	Zinsen	16
6.1	Terminzins	16
6.2	Kassazins	17
6.3	Vergleich von Terminzinsen und Kassazinsen	17
6.4	Einfache Zinsen	17
7	Marktwerte	19
7.1	Marktwert der garantierten Zahlungen	19
7.2	Marktwerte und Terminzinsen	20
7.3	Die individuelle Gewinnzuteilungsmöglichkeit	21
8	Arbitrage-freie Preisgestaltung	23
8.1	Ein Beispiel zu Arbitrage	23
8.2	Gehandelte Wertpapiere	23
8.3	Investitionsstrategie	24
8.4	Der Kostenprozess	25
8.5	Selbstfinanzierende Strategien	26
8.6	Äquivalente Martingal-Maße und Arbitragefreiheit	26
8.6.1	Äquivalente Martingal-Maße	26
8.6.2	Martingalmaße garantieren Arbitragefreiheit	27

9 Modelle für den Kassakurs in stetiger Zeit	29
9.1 Affine Modelle	30
9.1.1 Das Vasicek Modell	31
9.1.2 Das Cox-Ingersoll-Ross Modell	31
10 Marktwerte	32
11 Literatur	34

1 Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, Grundkonzepte der Zinstheorie zu erklären und diese dann beispielhaft für die Berechnung der Marktwerte anzuwenden. Als Literatur habe ich für diese Arbeit von Möller und Steffensen “International Series on Actuarial Science - Market Valuation Methods in Life and Pension Insurance“ verwendet. Aus der Lebensversicherungsmathematik kennen wir bereits die Berechnungen mit einzelnen Verträgen, nun wird allerdings das gesamte Portfolio einer Versicherung behandelt.

2 Bewertung mit Risikostreuung

Es stellen sich folgende Fragen: Wie wurden Lebensversicherungsverträge ursprünglich bewertet? Was ist das Argument hinter diesen Methoden? Was ist Diversifikation? Um diese Fragen beantworten zu können, betrachten wir zuerst das versicherungsmathematische **Gesetz der großen Zahlen** und wie dieses für Lebensversicherungsverträge angewendet werden kann. Insbesondere betrachten wir Situationen mit stochastischem Zins.

2.1 Das Gesetz der großen Zahlen

Die erste Version dieses Gesetzes stammt von dem Schweizer Mathematiker Jakob Bernoulli. Es sagt aus, dass sich das Mittel eines Experiments, also zum Beispiel die durchschnittliche Anzahl der Adler, die ich beim m -maligen Werfen einer Münze erhalte, immer mehr dem Erwartungswert annähert, je öfter man das Experiment durchführt.

Für Versicherungen ist dieses Gesetz sehr wichtig, da es eine ungefähre Vorhersage des künftigen Schadenverlaufes erlaubt. Je größer die Anzahl der versicherten Personen, Güter und Sachwerte ist, die von der gleichen Gefahr bedroht werden, desto geringer ist der Einfluss des Zufalls. Man muss jedoch erwähnen, dass Großereignisse und Trends, wie zum Beispiel der Klimawandel, die Durchschnittswerte verändern und das Gesetz der großen Zahlen, zumindest teilweise, unbrauchbar machen.

Wir betrachten nun ein Portfolio von l_x gleichen, n -jährigen Erlebensfallversicherungsverträgen mit Versicherungssumme 1. Für $t \geq 0$ bezeichnen wir l_{x+t} als die erwartete Anzahl der Überlebenden im Alter $x + t$. Es gibt folgende Standardannahmen:

- Die l_x Versicherungsnehmer sind alle zum Zeitpunkt 0 im Alter von x

mit verbleibender Lebensdauer von T^1, \dots, T^{l_x} und der gleichen Überlebenswahrscheinlichkeit

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \exp\left(-\int_0^t \mu(x+u) du\right), \quad (1)$$

wobei die Sterbeintensität μ eine deterministische Funktion ist.

- Eine weitere Annahme ist, dass die Verträge durch eine einzige Prämie $\pi(0)$ zur Zeit 0 bezahlt werden.

Man kann natürlich nicht genau sagen, wie viele Versicherungsnehmer l_x zur Zeit n überleben, aber je mehr Leute man beobachtet, umso näher ist die Zahl der Überlebenden an der erwarteten Anzahl l_{x+n} . Dies folgt aus dem Gesetz der großen Zahlen. Um dies zu veranschaulichen, führen wir folgenden Indikator ein:

$1_{T^i > n}$... der i -te Versicherungsnehmer überlebt

Das Verhältnis zwischen der Anzahl der Überlebenden zur Zeit n und der Anzahl der Versicherungsnehmer, die den Vertrag zur Zeit 0 abgeschlossen haben, ist:

$$\frac{1}{l_x} \sum_{i=1}^{l_x} 1_{T^i > n} \quad (2)$$

Diese Gleichung (2) konvergiert gegen

$$E[1_{T^1 > n}] = P(T^1 > n) = {}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \quad (3)$$

für $l_x \rightarrow \infty$ und wenn die Lebensdauer der Versicherungsnehmer unabhängig sind. Dies zeigt uns, dass die tatsächliche Anzahl der Überlebenden sehr nahe an der Vorhergesehenen liegt, je größer l_x ist. Das heißt

$$\sum_{i=1}^{l_x} 1_{T^i > n} \approx l_x {}_n p_x = l_{x+n}$$

Es ist jedoch wichtig zu erwähnen, dass die angenommene Unabhängigkeit ausschlaggebend dafür ist, um die Konvergenz zu erhalten. In realistischeren Modellen, in denen die zukünftige Sterbeintensität μ stochastisch ist, setzt das Gesetz der großen Zahlen nicht voraus, dass (2) gegen eine Konstante konvergiert. Es wird zwischen *unsystematischem Sterberisiko* und *systematischem Sterberisiko* unterschieden. Das systematische Risiko hängt mit den

Konsequenzen der stochastischen Änderungen in der zugrundeliegenden Sterbeintensität zusammen und das unsystematische Risiko ist das Risiko, das mit der versicherten Lebensdauer zusammenhängt. Das unsystematische Risiko kann vermieden werden, indem man die Größe des Portfolios anhebt, während das systematische nicht eliminiert werden kann.

2.2 Aufzinsungs- und Diskontierungsfaktoren

Was ist das Verhältnis zwischen der jährlichen Zinsrate und der Zinsintensität? Wie geht man mit Zinssätzen um, die während der Dauer des Vertrages nicht konstant sind? Normalerweise wird angenommen, dass das Versicherungsunternehmen das Kapital mit einem jährlichen Zinssatz i investiert und dieser während der Dauer des Vertrages konstant ist. Wir führen nun folgende Faktoren ein:

$$r = \ln(1 + i)$$

$e^r = 1 + i$ ist der einjährige Aufzinsungsfaktor

$e^{rt} = (1 + i)^t = S(t)$ ist der t -jährige Aufzinsungsfaktor, welcher der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}S(t) = rS(t) \quad (4)$$

entspricht mit der Anfangsbedingung $S(0) = 1$.

r ist die Zinsintensität (*force of interest*) und kann als Zinsrate für stetige Verzinsung interpretiert werden.

$$v^t = (1 + i)^{-t} = e^{-rt} = S(t)^{-1} \quad (5)$$

ist der **t -jährige Diskontierungsfaktor**, wobei natürlich $v = e^{-r}$ ist.

Wie kann dies jetzt für Fälle angewendet werden, wo i nicht konstant ist?

Dazu benötigen wir den Faktor $i(s)$, welcher die jährliche Zinsrate für das Jahr s ist und $r(s)$, welcher die entsprechende Zinsintensität für dieses Jahr widerspiegelt; bestimmt durch die Gleichung $(1 + i(s)) = e^{r(s)}$

$$S(t) = (1 + i(1)) \cdots (1 + i(t)) = \exp\left(\sum_{s=1}^t r(s)\right) \quad (6)$$

ist der **t -jährige Aufzinsungsfaktor**.

Wenn wir nun den Fall diskutieren, dass sich der Zinssatz öfter als einmal im Jahr ändern kann, benötigen wir folgenden Faktor:

$r(u)$ ist die Zinsintensität zu einer bestimmten Zeit u .

Den neuen Aufzinsungsfaktor erhalten wir, indem wir in Gleichung (4) den Faktor r zeitabhängig machen:

$$\frac{d}{dt}S(t) = r(t)S(t). \quad (7)$$

Wenn wir diese Gleichung nun mit der Anfangsbedingung $S(0) = 1$ lösen, erhalten wir den Aufzinsungsfaktor

$$S(t) = \exp\left(\int_0^t r(u)du\right) \quad (8)$$

und den Diskontierungsfaktor

$$S(t)^{-1} = \exp\left(-\int_0^t r(u)du\right). \quad (9)$$

2.3 Der Verlust des Versicherers und das Äquivalenzprinzip

Wir betrachten nun ein Portfolio von l_x Erlebensfallversicherungen, die zur Zeit n ablaufen und mit einer Einmalprämie $\pi(0)$ zur Zeit 0 bezahlt werden. Weiters nehmen wir an, dass die Anzahl der Überlebenden einer fallenden Reihe ähnelt, das bedeutet, dass sie deterministisch und gleich l_{x+n} ist.

Mit diesem Vertrag erhält jeder Überlebende zur Zeit n eine Einheit; der Barwert der Leistung zur Zeit 0 ist $S(n)^{-1}l_{x+n}$. Da die Prämien $l_x\pi(0)$ zur Zeit 0 zu zahlen sind, ist keine Abzinsung notwendig und der Barwert der Prämien ist gleich der Zahlung $l_x\pi(0)$. Der Barwert des Verlustes des Versicherers verbunden mit dem Portfolio folgt aus der Definition

$$L = l_{x+n}S(n)^{-1} - l_x\pi(0). \quad (10)$$

Die Prämie $\pi(0)$ nennt man angemessen, wenn $L = 0$ ist. Wenn $S(n)$ deterministisch ist oder zur Zeit 0 bekannt ist, dann ist die angemessene Prämie die Äquivalenzprämie: mit $S(t) = \exp(\int_0^t r(u)du)$ erhalten wir aus der Gleichung (10)

$$\pi(0) = \frac{l_{x+n}}{l_x} \exp\left(-\int_0^n r(u)du\right) = {}_n p_x \exp\left(-\int_0^n r(u)du\right), \quad (11)$$

was dem erwarteten Barwert der Leistung entspricht. Dies funktioniert allerdings nur, wenn der Diskontierungsfaktor $S(n)^{-1} = \exp(-\int_0^n r(u)du)$ deterministisch ist. Wenn die zukünftigen Zinssätze zur Zeit 0 nicht bekannt sind, können wir diese Prämie nicht fordern, da wir $S(n)$ zur Zeit des Vertragsverkaufs nicht kennen.

Also sehen wir, dass wir mit ein paar Berücksichtigungen das Sterberisiko eliminieren können, indem wir die Größe des Portfolios anheben, wenn die versicherten Leben unabhängig sind. Das heißt, dass das Sterberisiko vermeidbar ist.

Bei Betrachtung der Formel (11) sehen wir, dass wir den Faktor $S(n)^{-1}$ nicht beseitigen können, wenn $S(n)$ zufällig ist. Dies kann so interpretiert werden, dass zwar das Sterberisiko eliminiert, das Risiko in Bezug auf die zukünftige Entwicklung des Zinssatzes jedoch nicht vermieden werden konnte, indem man die Größe des Portfolios anhebt. Wie kann man aber dann dieses Risiko kontrollieren oder eliminieren? Indem man mit Nullkuponanleihen handelt, welche im nächsten Kapitel erklärt werden.

3 Anleihen

Die meisten Anleihen, mit denen auf den Anleihenmärkten gehandelt wird, sind allgemeiner als Nullkuponanleihen. Typische Beispiele sind *annuity bonds* und *bullet bonds*. Wir diskutieren in diesem Kapitel die Nullkuponanleihe sowie die Grundstruktur der allgemeinen Anleihen und wie die Preise dieser Anleihen mit den der Nullkuponanleihen zu vergleichen sind.

3.1 Nullkuponanleihe

Eine Nullkuponanleihe beziehungsweise ein *Zero Coupon Bond* ist eine Sonderform des verzinslichen Wertpapiers. Dabei gibt es keine laufende Zinszahlung und nur eine Auszahlung am Ende der Laufzeit der Anleihe. Der Gewinn für den Anleger besteht daher nur in der Differenz zwischen dem Erwerbiskurs und dem Verkaufskurs.

Definition: Eine Nullkuponanleihe mit Fälligkeit T , also eine T -Anleihe, ist ein Vertrag, der zur Zeit T eine Einheit zahlt. Der Preis zur Zeit $t \in [0, T]$ wird durch $P(t, T)$ bestimmt. Wir nehmen $P(t, t) = 1$ an.

Oft werden die Verträge, die wir zuvor besprochen haben, *default free* Nullkuponanleihen genannt, was bedeutet, dass die Anleihen sehr unwahrscheinlich in Verzug geraten. Im Unterschied dazu gibt es auch *defaultable* Anleihen, die für große Firmen oder Länder ausgestellt werden, die weniger kreditwürdig sind. Anleihen für solche Gesellschaften geben meist einen höheren Ertrag für die Eigentümer, da die Anleihen wertlos sein könnten, wenn der Emittent bankrott geht. Dieses Risiko nennt man Bonitätsrisiko. Im Folgenden werden wir uns auf die ausfallfreien Anleihen konzentrieren.

3.2 Eine allgemeine Anleihe

Wir betrachten eine Anleihe, ausgestellt zur Zeit τ_0 mit Zahlungen c_1, \dots, c_n zu gegebenen Zeiten $\tau_1 < \dots < \tau_n$. Der Wert einer solchen Anleihe zur Zeit $t \geq \tau_0$, also nach möglichen Zahlungen zur Zeit t , ist

$$P(t) = \sum_{i:\tau_i>t} P(t, \tau_i)c_i, \tag{12}$$

wobei $P(t, \tau_i)$ der Preis einer Nullkuponanleihe zur Zeit t mit Fälligkeit τ_i ist. Ein einfaches Arbitrage-Argument zeigt, dass dies der einzige Preis ist, der nicht zur Möglichkeit eines risikofreien Gewinnes führt und das, obwohl es möglich ist die Anleihe aus Gleichung (12) zu kaufen und zu verkaufen wie

Nullkuponanleihen mit Fälligkeiten τ_1, \dots, τ_n .

Annuity bond: Diese Form der Anleihe erhält man, indem man $c_k = c$ für $k = 1, \dots, n$ setzt.

Bullet bond: Diese Anleihe erhält man, indem man für $k = 1, \dots, n - 1$

$$c_k = L(\tau_k - \tau_{k-1})K$$

und für $k = n$

$$c_n = L(\tau_n - \tau_{n-1})K + K$$

nimmt, wobei L eine *simple rate* und K ein Geldbetrag ist. Mit dieser Anleihe erhält der Eigentümer zur Zeit τ_k den einfachen Zins $L(\tau_k - \tau_{k-1})$ auf das Kapital K für das Intervall $[\tau_{k-1}, \tau_k]$. Zur Zeit τ_n wird das Kapital K gemeinsam mit dem Zins für das Intervall $[\tau_{n-1}, \tau_n]$ zurückgezahlt.

4 Hedgen

Den Ausdruck *hedgen* könnte man mit absichern übersetzen. Er ist seit dem Wirtschaftsnobelpreis für Merton und Scholes 1997 für die Black-Scholes-Optionspreisformel in aller Munde. Was ist also der Unterschied zwischen ab- und versichern? Durch den Kauf bzw. Verkauf von Derivaten (Futures, Optionen, Swaps) können bestehende Wertpapierpositionen gegen negative Kursentwicklungen abgesichert werden. In diesem Abschnitt ändern wir das Äquivalenzprinzip so, dass der Versicherer mit Nullkuponanleihen handeln kann, das heißt das Risiko, verbunden mit der Entwicklung des Zinssatzes, zu kontrollieren oder zu eliminieren. In diesem Kapitel betrachten wir allerdings nur garantierte Zahlungen.

4.1 Ein Portfolio von Erlebensfallversicherungen hedgen

Angenommen der Versicherer investiert zur Zeit 0 in $l_x\kappa$ Einheiten einer n -Anleihe, wobei er genau l_x Versicherte im Alter x hat, κ ist also lediglich ein Skalierungsfaktor. Der Barwert des Verlustes des Versicherers vom Portfolio von l_x Erlebensfallversicherungen ist

$$\tilde{L} = (l_{x+n}S(n)^{-1} - l_x\pi(0)) + l_x\kappa(P(0, n) - 1 \cdot S(n)^{-1}), \quad (13)$$

wobei wir angenommen haben, dass die Anzahl der Überlebenden wieder einer fallenden Reihe ähnelt. Außerdem haben wir Zahlungen diskontiert, indem wir die wahre Zinsrate (den Marktzinssatz) verwendet haben. Der erste Teil der Gleichung deckt sich mit dem Barwert des Verlustes des Unternehmens ohne in n -Anleihen zu investieren und der zweite Teil zeigt den Barwert des Verlustes vom Kauf von $l_x\kappa$ n -Anleihen zur Zeit 0 zum Preis $P(0, n)$. Dieser Teil ist die Differenz zwischen dem Preis $P(0, n)$ der Anleihe zur Zeit 0 und dem vom Unternehmen zur Zeit n erhaltenen diskontierten Betrag. Durch das Umordnen der Gleichung erhalten wir

$$\tilde{L} = (l_{x+n} - l_x\kappa)S(n)^{-1} + l_x(\kappa P(0, n) - \pi(0)).$$

Der erste Term ist 0, wenn $\kappa = \frac{l_{x+n}}{l_x} = {}_n p_x$ und der zweite verschwindet, wenn

$$\pi(0) = {}_n p_x P(0, n). \quad (14)$$

Die angemessene Prämie nach Gleichung (14) ist der Preis zur Zeit 0 einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeit n multipliziert mit der n -jährigen Überlebenswahrscheinlichkeit. Im Portfolio mit l_x Versicherungsnehmer sollte der

Versicherer $l_x \cdot n p_x = l_{x+n}$ Anleihen ankaufen, was genau der erwarteten Anzahl von Überlebenden entspricht.

Man sollte beachten, dass die Argumente, die zu Gleichung (14) führen, die angemessene Prämie für garantierte Zahlungen genauso bestimmt wie eine Investitionsstrategie: dass der Versicherer die gesamte Prämie in n -Anleihen investieren soll. Auf diese Weise kann der Versicherer die Leistungspflicht abgleichen, da der Wert der Anleihe zur zukünftigen Zeit t , gekauft zur Zeit 0, durch

$$l_x n p_x P(t, n) = l_{x+n} P(t, n)$$

gegeben ist. Das Argument zur Ermittlung des Preises zur Zeit 0 des garantierten Teiles der Erlebensfallversicherung kann nun zur Zeit t für jeden der l_{x+t} übrigen Versicherungsnehmer wiederholt werden. Daher ist der Marktwert zur Zeit t der garantierten Zahlungen, verbunden mit diesen l_{x+t} Erlebensfallversicherungsverträgen, durch

$$l_{x+t} n-t p_{x+t} P(t, n) = l_{x+n} P(t, n)$$

gegeben, was zeigt, dass der Marktwert der Leistungspflichten genau gleich ist wie der Wert der *assets* zu irgendeiner Zeit t für jede zukünftige Entwicklung des Wertes der Nullkuponanleihe. Jede Steigung und Senkung des Anleihenkurses führt zu genau der gleichen Veränderung im Wert der *assets* und der Leistungspflicht.

Man muss beachten, dass der Marktwert der garantierten Zahlungen nicht von der Wahl der Investitionsstrategie des Unternehmens abhängt, obwohl der Marktwert durch ein *hedging*-Argument abgeleitet wird. Wenn es möglich wäre, solche Verträge anzukaufen und zu verkaufen zu Preisen, die vom Marktwert abweichen, könnte man risikofreie Gewinne erzielen (\rightarrow Arbitrage), indem man in Nullkuponanleihen investiert.

4.2 Ein Portfolio von Risikoversicherungen hedgen

Der Vollständigkeit halber zeigen wir wie das *hedging*-Argument für die Preisgestaltung und das *Hedgen* des garantierten Teiles der Risikoversicherung angewendet werden kann. Wir betrachten ein Portfolio von l_x Risikoversicherungen. Die Anzahl der toten $x+t$ -jährigen, vorausgesagt durch die *decrement series* zur Zeit 0, ist

$$d_{x+t} = l_{x+t} - l_{x+t+1}.$$

Der Einfachheit halber sollte man den Fall bedenken, wo die Versicherungssumme am Ende des Jahres zu zahlen ist, das heißt zu den Zeitpunkten

$t = 1, 2, \dots, n$. In diesem Fall muss das Argument für die Erlebensfallversicherung ein bisschen abgeändert werden, sodass das Unternehmen jetzt in Nullkuponanleihen mit Ablaufzeiten $t = 1, 2, \dots, n$ investiert. Genau genommen, dass das Unternehmen zur Zeit 0 in $l_x \kappa(t)$ t -Anleihen mit Preis $P(0, t)$ investiert. Der Verlust des Unternehmens zur Zeit 0 ist dann

$$\tilde{L} = \left(\sum_{t=1}^n d_{x+t-1} S(t)^{-1} - l_x \pi(0) \right) + l_x \sum_{t=1}^n \kappa(t) (P(0, t) - 1 \cdot S(t)^{-1}), \quad (15)$$

was genauso interpretiert werden kann wie bei den Erlebensfallversicherungen. Dies kann umgeschrieben werden in

$$\tilde{L} = \sum_{t=1}^n (d_{x+t-1} - l_x \kappa(t)) S(t)^{-1} + l_x \left(\sum_{t=1}^n \kappa(t) P(0, t) - \pi(0) \right).$$

Der erste Term ist 0, wenn

$$\kappa(t) = \frac{d_{x+t-1}}{l_x} = {}_{(t-1)|1}q_x = {}_{t-1}p_x q_{x+t-1},$$

was genau die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine zur Zeit 0 x -jährige Person im Intervall $(t-1, t]$ stirbt. Der zweite Teil ist 0, wenn

$$\pi(0) = \sum_{t=1}^n {}_{(t-1)|1}q_x P(0, t). \quad (16)$$

Diese angemessene Prämie unterscheidet sich von der klassischen Formel darin, dass der übliche Diskontierungsfaktor durch Nullkuponanleihen ersetzt wurde. Schließlich sollte man erwähnen, dass wir eine neue Version der Gleichung brauchen, wenn die Versicherungssumme sofort nach dem Tod zu zahlen ist und nicht am Ende jedes Jahres wie in Gleichung (16). Dies kann zum Beispiel erreicht werden, indem man kleine Zeitintervalle beachtet und für kleine h

$${}_{t|h}q_x \approx {}_t p_x \mu(x+t)h$$

berücksichtigt. Also wird aus (16)

$$\pi(0) = \int_0^n {}_t p_x \mu(x+t) P(0, t) dt. \quad (17)$$

In dieser Situation ist es nicht mehr möglich abzusichern, dass $\tilde{L} = 0$ ist, ganz gleich wie viele verschiedene Anleihen man kauft. Der Grund dafür ist, dass die Zahlungen zu jeder Zeit auftreten können, das heißt, dass es unendlich viele mögliche Zahlungszeitpunkte gibt. Wir können aber auf jeden Fall \tilde{L} beliebig nahe an 0 annähern, indem man genügend viel Nullkuponanleihen auswählt. Ein anderer Aspekt ist, dass man in der Praxis mit endlich vielen verschiedenen Zahlungszeitpunkten arbeitet.

4.3 Hedgen und Erreichbarkeit

Der Versicherer investiert am Finanzmarkt, um das Risiko, verbunden mit einer Leistungspflicht H , zu kontrollieren. In einigen Situationen ist es möglich eine Selbstfinanzierungsstrategie zu bestimmen, die die gesamte Leistungspflicht entwickelt und wiederholt. Dies ist der Fall, wenn eine Selbstfinanzierungsstrategie h existiert, die mit dem Betrag $V(0, h)$ beginnt und den Restwert $V(T, h) = H$ zur Zeit T hat. In diesem Fall ist der Anfangswert $V(0, h)$ der einzig sinnvolle Preis für die Leistungspflicht H ; solche Forderungen können auch **erreichbar** genannt werden und $V(0, h)$ wird der arbitragefreie Preis von H genannt.

In vielen Fällen können die Leistungspflichten des Hedgers nicht perfekt abgesichert werden, indem man eine Selbstfinanzierungsstrategie verwendet und dies lässt die Frage offen wie man die optimale Handelsstrategie wählt.

5 Rendite

Definition: Der fortlaufend zusammengestellte *zero coupon yield* oder Kassazins $R(t, T)$ für $[t, T]$ wird definiert durch

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log P(t, T).$$

Daraus folgt sofort, dass der Preis der Nullkuponanleihe folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$P(t, T) = \exp(-R(t, T)(T-t)). \quad (18)$$

Diese Gleichung kann als Diskontierungsfaktor, bestimmt durch den (konstanten) Zinssatz $R(t, T)$ während des Intervalls $[t, T]$, interpretiert werden. Dieser Zinssatz $R(t, T)$ gilt für jede Zeit $u \in [t, T]$; die Intensität hängt aber vom Preis der Nullkuponanleihe zur Zeit t ab.

Definition: Die Zinsstruktur zur Zeit t ist durch folgende Abbildung gegeben:

$$h \mapsto R(t, t+h)$$

Hier ist der Ertrag zur Fälligkeit $y(t)$ (*yield to maturity*) der konstante Anteil, der absichert, dass der diskontierte Wert aller zukünftigen Zahlungen dem Wert der Anleihe zur Zeit t entspricht.

Definition: Der Ertrag zur Fälligkeit zur Zeit t der Anleihe in der Gleichung (12) ist die Lösung $y(t)$ der folgenden Gleichung

$$P(t) = \sum_{i:\tau_i>t} e^{-y(t)(\tau_i-t)} c_i =: F(t, y(t)). \quad (19)$$

Man muss beachten, dass wenn alle c_i nicht negativ sind und für einige i mit $\tau_i > t$ auch $c_i > 0$ ist, dann ist die Abbildung $y(t) \mapsto F(t, y(t))$ stark fallend, das bedeutet, dass nur eine einzige nicht negative Lösung für die Gleichung (19) existiert. Also ist $y(t)$ der konstante Anteil der Returns, die der Besitzer für die Zahlungen während $(t, \tau_n]$ erhält.

Eine natürliche Frage ist nun: Wie sensibel ist der Preis $P(t)$ der Anleihe auf Veränderungen im Ertrag zur Fälligkeit? Es kann relevant sein, festzustellen, wie sensibel der Wert des gesamten Portfolios der Anleihen des Unternehmens bei Veränderungen in der Grundstruktur ist. Gleichermäßen könnte man an einem Vergleich der Sensibilität der verschiedenen Anleihen interessiert sein. Dies führt uns zur sogenannten *duration* einer Anleihe, die als

gewichtetes Mittel der Zahlungszeitpunkte τ_i , $c_i \geq 0$, gewichtet durch die Faktoren $c_i e^{-y(t)(\tau_i - t)}$, interpretiert werden kann.

Diese Faktoren repräsentieren die Werte der Zahlungen c_i zur Zeit t , diskontiert indem man den Ertrag $y(t)$ verwendet. Die genaue Definition des Konzeptes der *duration* ist:

Definition: Die *duration* $D(t)$ zur Zeit t der Anleihe in Gleichung (12) mit dem Ertrag zur Fälligkeit $y(t)$ ist definiert durch

$$D(t) = \frac{\sum_{i:\tau_i>t} (\tau_i - t) e^{-y(t)(\tau_i - t)} c_i}{P(t)}. \quad (20)$$

Daraus erkennen wir, dass die *duration* zur Zeit t für eine Nullkuponanleihe mit Fälligkeit τ mit der Zeit der Fälligkeit $\tau - t$ übereinstimmt. Wenn wir $P(t)$ aus der Gleichung (19) als eine Funktion des Ertrages zur Fälligkeit $y(t)$ betrachten, erhalten wir, indem wir die Gleichung (19) im Hinblick auf $y(t)$ differenzieren, folgendes:

$$\frac{d}{dy(t)} P(t) = - \sum_{i:\tau_i>t} (\tau_i - t) e^{-y(t)(\tau_i - t)} c_i = -P(t)D(t) \quad (21)$$

$D(t)$ gibt also die Sensitivität des Preises $P(t)$ in Bezug auf Änderungen des Ertrags an.

6 Zinsen

6.1 Terminzins

Unter einem Terminzins beziehungsweise *forward rate* versteht man den Zinssatz, der für Kapitalanlagen fällig wird, deren Laufzeit nicht sofort, sondern an einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft beginnt. Dazu führen wir folgende Zeiten ein: $0 \leq t \leq T' \leq T$.

Es ist derjenige Zinssatz, der zur Zeit t (heute) für eine zukünftige Investition zur Zeit T' vereinbart wird und zur Zeit T endet. Leider können wir den Ertrag (*yield*) $R(T', T)$ nicht nutzen, da dieser mit $P(T', T)$ definiert ist und dieser ist normalerweise zur Zeit t nicht bekannt.

Definition: Der fortlaufend zusammengesetzte Terminzins (Zinseszins) zur Zeit t für das Intervall $[T', T]$ ist definiert als

$$f(t, T', T) = -\frac{\log P(t, T) - \log P(t, T')}{T - T'}. \quad (22)$$

Das Verhältnis zwischen dem Preis für eine T -Anleihe zur Zeit t und für eine T' -Anleihe zur Zeit t ist

$$\frac{P(t, T)}{P(t, T')} = \exp(-f(t, T', T)(T - T')). \quad (23)$$

Definition: Der sofortige Terminzins zur Zeit t für die Zeit T ist

$$f(t, T) = -\frac{d}{dT} \log P(t, T). \quad (24)$$

Aus dieser Gleichung folgt sofort

$$\int_t^T f(t, \tau) d\tau = -\log P(t, T) + \log P(t, t).$$

Da $P(t, t) = 1$ und $\log(1) = 0$ gelten, sehen wir, dass der Wert der Nullkuponanleihe zur Zeit t gegeben ist durch

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, \tau) d\tau\right). \quad (25)$$

Nun haben wir gezeigt, wie der sofortige Terminzins $f(t, \tau)$ zur Zeit t mit dem Preis der Nullkuponanleihe zur Zeit t zusammenhängt.

6.2 Kassazins

Unter dem Kassazins $R(t, T)$ beziehungsweise *spot rate* versteht man den Zinssatz, der mit heute am Markt vorhandene Anleihen über eine gewisse Laufzeit von heute an risikolos abgesichert werden kann. Dieser ist in der Regel für verschiedene Laufzeiten unterschiedlich. Der Terminzins ist das Gegenstück zum Kassazins; diesen kann man aus den Kassazinsen zu verschiedenen Laufzeiten eindeutig berechnen.

6.3 Vergleich von Terminzinsen und Kassazinsen

Aus der Gleichung (23) mit $T' = t$ folgt, dass

$$f(t, t, T) = R(t, T)$$

das heißt, dass der Terminzins zur Zeit t für $[t, T]$ mit dem Kassazins für $[t, T]$ übereinstimmt.

Wenn man die Gleichung (18) mit $P(t, T) = \exp(-\int_t^T f(t, \tau)d\tau)$ kombiniert, erhalten wir

$$\frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, \tau)d\tau = R(t, T). \quad (26)$$

Das heißt, dass der Nullkuponertrag für $[t, T]$ als Durchschnitt der sofortigen Terminzinsen interpretiert werden kann.

6.4 Einfache Zinsen

Als Alternative zu fortlaufend zusammengesetzten Zinsen (Zinseszinsen), die wir bereits diskutiert haben, sehen wir uns jetzt einfache Erträge oder einfache Kassazinsen und einfache Terminzinsen an. Einfache Zinsen unterscheiden sich grundsätzlich von zusammengesetzten Zinsen in dem Sinn, dass ehemalige Zinsen in der Berechnung der Zinsen für einen gegebenen Zeitraum nicht berücksichtigt werden. Wenn wir einen Betrag P zur Zeit 0 auf ein Konto mit einfachen Zinsen L einzahlen, führt dies zu einem Zins von $PL(t-s)$ für die Zeitperiode $[s, t]$. Mit stetiger Aufzinsung unter einem konstanten Zinssatz r , würde das Guthaben auf dem Sparkonto von Pe^{rs} zur Zeit s auf Pe^{rt} zur Zeit t ansteigen. Also ist der gutgeschriebene Anteil während des Intervalls $[s, t]$ gegeben durch

$$P(e^{rt} - e^{rs}) = Pe^{rs}(e^{r(t-s)} - 1).$$

Definition: Der einfache Ertrag oder der einfache Kassazins für $[t, T]$ ist gegeben durch

$$L(t, T) = -\frac{P(t, T) - 1}{(T - t)P(t, T)}$$

und der einfache Terminzins für $[T', T]$ zur Zeit t ist gegeben durch

$$L(t, T', T) = -\frac{P(t, T) - P(t, T')}{(T - T')P(t, T)}.$$

Aus der Definition des einfachen Kassazinses folgt, dass

$$L(t, T)(T - t)P(t, T) = 1 - P(t, T).$$

Das heißt, dass $1 - P(t, T)$ der Ertrag während des Intervalls $[t, T]$ vom Kauf einer T -Anleihe zur Zeit t zum Preis $P(t, T)$ und vom Einlösen des Betrages 1 zur Zeit T ist. Mit dem Prinzip der einfachen Zinsen ist der Betrag $P(t, T)L(t, T)(T - t)$ genau der Anteil, der im Intervall $[t, T]$ in Kombination mit der Investition von $P(t, T)$ unter dem konstanten einfachen Zins $L(t, T)$ anfällt.

7 Marktwerte

Der Marktwert oder auch Tageswert ist der durch einen tatsächlich gehandelten Preis bestimmte Wert eines Gutes im Zeitpunkt dieser Transaktion

7.1 Marktwert der garantierten Zahlungen

Wir betrachten eine Erlebensfallversicherung mit einer stetig zu zahlenden Prämie π . Nach dem Erleben von n , erhält der Versicherungsnehmer einen garantierten Betrag $b^a(0)$, während b^{ad} sofort nach dem Tod vor dem Zeitpunkt n zu zahlen ist. Weiters nehmen wir an, dass der Vertrag zur Zeit 0 beginnt, also wenn der Versicherungsnehmer x Jahre alt ist. Der Marktwert (der angemessene Preis) der Zahlungen nach dem Erleben von n zur Zeit t , garantiert zur Zeit 0, ist

$$b^a(0)P(t, n)_{n-t}p_{x+t},$$

wobei $_{n-t}p_{x+t}$ die Überlebenswahrscheinlichkeit ist. Der Marktwert zur Zeit t für den Teil des Vertrages, der die Zahlung b^{ad} sofort nach dem Tod vor n beinhaltet, ergibt sich als

$$b^{ad} \int_t^n P(t, s)_{s-t}p_{x+t}\mu(x+s)ds,$$

wobei $P(t, s)$ der Preis einer Nullkuponanleihe zur Zeit t mit Ablaufzeit s ist. Der Marktwert der zukünftigen Prämien zur Zeit t ist

$$\pi \int_t^n P(t, s)_{s-t}p_{x+t}ds.$$

Dieser Wert wird auf die gleiche Weise berechnet wie der Marktwert der Leistungen. Beide beziehen sich auf Nullkuponanleihenurse zur Zeit t anstatt der üblichen Diskontierungsfaktoren. Eigentlich ist der einzige Unterschied zwischen den beiden das Symbol.

Wenn wir nun die drei obigen Ausdrücke miteinander kombinieren, erhalten wir für die garantierten Zahlungen zur Zeit 0 folgenden Marktwert:

$$V^g(0, t) = b^a(0)P(t, n)_{n-t}p_{x+t} + \int_t^n P(t, s)_{s-t}p_{x+t}(\mu(x+s)b^{ad} - \pi)ds. \quad (27)$$

$V^g(t)$ ist der Marktwert zur Zeit t für die garantierten Zahlungen zur Zeit t , dieser wird berechnet, indem man $b^a(0)$ durch $b^a(t)$ ersetzt.

Wenn r und μ deterministische Funktionen sind, können die Nullkuponanleihenurse geschrieben werden als

$$P(t, s) = \exp\left(-\int_t^s r(\tau)d\tau\right). \quad (28)$$

Wenn wir nun dies nun in die Gleichung (27) einsetzen, erhalten wir den Marktwert zur Zeit u für die garantierten Zahlungen zur Zeit t :

$$\begin{aligned} V^g(t, u) &= b^a(t) \exp\left(-\int_u^n r(\tau)d\tau\right) {}_{n-u}p_{x+u} \\ &+ \int_u^n \exp\left(-\int_u^s r(\tau)d\tau\right) {}_{s-u}p_{x+u} (\mu(x+s)b^{ad} - \pi) ds = \\ &= b^a(t) {}_{n-u}E_{x+u} + b^{ad} A^1_{x+u; \overline{n-u}} - \pi a_{x+u; \overline{n-u}} \end{aligned}$$

7.2 Marktwerte und Terminzinsen

In diesem Kapitel werden wir eine Version der Thieleschen Differentialgleichung für Marktwerte der garantierten Zahlungen herleiten, die Terminzinsen enthalten. Im Kapitel der Terminzinsen wurde bereits gezeigt, wie der sofortige Terminzins $f(t, \tau)$ zur Zeit t mit dem Preis der Nullkuponanleihe zur Zeit t zusammenhängt. Wenn wir nun diesen Ausdruck in die Gleichung für $V^g(t, u)$ einsetzen, erhalten wir sofort

$$\begin{aligned} V^g(t, u) &= b^a(t) \exp\left(-\int_u^n f(u, \tau)d\tau\right) {}_{n-u}p_{x+u} \\ &+ \int_u^n \exp\left(-\int_u^s f(u, \tau)d\tau\right) {}_{s-u}p_{x+u} (\mu(x+s)b^{ad} - \pi) ds. \end{aligned}$$

Für $t = u$ ergibt sich der Marktwert $V^g(t)$ zur Zeit t für garantierte Zahlungen zur Zeit t . Dieser Ausdruck ist bei stochastischem Zins sehr wichtig, da in diesem Fall die Gleichung für den Marktwert zur Zeit u für die garantierten Zahlungen zur Zeit t nicht direkt verwendet werden kann. In dieser Situation können wir eine alternative Gleichung für den Marktwert herleiten, die den klassischen Formeln sehr ähnlich ist. Der stochastische Zins wird jedoch durch sofortige Terminzinsen zur Zeit u ersetzt, da diese zur Zeit u bekannt sind.

Wir erklären nun eine Version der Thieleschen Differentialgleichung, welche auch die Möglichkeit zur Herleitung einer Differentialgleichung für die individuelle Gewinnzuteilungsmöglichkeiten in einem Modell mit stochastischen

Zinssätzen eröffnet. Zunächst führen wir eine zusätzliche Hilfsfunktion ein:

$$V^{g,\circ}(t, u) = b^a(t) \exp\left(-\int_u^n f(t, \tau) d\tau\right) {}_{n-u}p_{x+u} \\ + \int_u^n \exp\left(-\int_u^s f(t, \tau) d\tau\right) {}_{s-u}p_{x+u} (\mu(x+s)b^{ad} - \pi) ds.$$

Diese kann als Wert zur Zeit u für die garantierten Zahlungen zur Zeit t interpretiert werden, berechnet indem man den sofortigen Terminzins zur Zeit t verwendet. $V^{g,\circ}(t, u)$ ist also nicht wirklich ein Marktwert. Der Hauptgrund für diesen Ausdruck ist, dass es eine sehr einfache Funktion von u ist, die direkt differenziert werden kann. Deshalb erhalten wir für $u \geq t$ folgende Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial u} V^{g,\circ}(t, u) = f(t, u) V^{g,\circ}(t, u) + \pi - \mu(x+u) R^{g,\circ}(t, u), \quad (29)$$

mit den Nebenbedingungen

$$V^{g,\circ}(t, t) = V^g(t), \\ V^{g,\circ}(t, n) = b^a(t),$$

wobei $R^{g,\circ}$ die Risikosumme ist:

$$R^{g,\circ}(t, u) = b^{ad} - V^{g,\circ}(t, u).$$

Diese Differentialgleichung bietet eine alternative Methode an, um die Hilfsfunktion $V^{g,\circ}(t, u)$ wie folgt zu berechnen:

Gegeben sind die zur Zeit t garantierte Versicherungssumme $b^a(t)$ und der Terminzins $f(t, u)$ zur Zeit t . Der Marktwert $V^g(t)$ kann berechnet werden, indem man die Gleichung (29) auf dem Intervall $[t, n]$ mit der abschließenden Bedingung entsprechend der Zahlung nach dem Erleben von n , garantiert zur Zeit t , löst.

7.3 Die individuelle Gewinnzuteilungsmöglichkeit

Die Terminzinsen können auch für die Herleitung eines Ausdrucks für die sogenannte individuelle Gewinnzuteilungsmöglichkeit V^{ib} verwendet werden. Die einfachste Situation ist der Fall mit $V(t) \geq V^*(t) \geq V^g(t)$, wobei $V(t)$ das ganze Deckungskapital ist. In diesem Fall ist die individuelle Gewinnzuteilungsmöglichkeit gegeben durch

$$V^{ib}(t) = V^*(t) - V^g(t).$$

Unter Verwendung der folgenden beiden Differentialgleichungen

- $\frac{\partial}{\partial u} V^*(t, u) = r^*(u)V^*(t, u) + \pi - \mu^*(x + u)R^*(t, u)$ und
- $\frac{\partial}{\partial u} V^{g,\circ}(t, u) = f(t, u)V^{g,\circ}(t, u) + \pi - \mu(x + u)R^{g,\circ}(t, u),$

wobei r^* der erstrangige Zinssatz und μ^* die erstrangige Sterbewahrscheinlichkeit ist. Weiters ist $V^*(t, u)$ die technische Reserve zur Zeit u für die garantierten Zahlungen zur Zeit t und $R^*(t, u) = b^{ad} - V^*(t, u)$ ist die Risikosumme.

Gemeinsam mit der abschließenden Bedingung

$$V^*(t, n) - V^{g,\circ}(t, n) = b^a(t) - b^a(t) = 0$$

erhalten wir

$$V^{ib}(t) = \int_t^n \exp\left(-\int_t^s (f(t, \tau) + \mu(x + \tau))d\tau\right) c(t, s) ds, \quad (30)$$

wobei

$$c(t, s) = (f(t, s) - r^*(s))V^*(t, s) + (\mu^*(x + s) - \mu(x + s))R^*(t, s). \quad (31)$$

Diese beiden Gleichungen unterscheiden sich von den ursprünglichen Formeln für die individuelle Gewinnzuteilungsmöglichkeit darin, dass der Marktzinssatz durch Terminzinsen ersetzt wurde. Dies dient dazu, die Wichtigkeit der Terminzinsen, im Falle eines stochastischen Zinssatzes, hervorzuheben, da die Sicherheitszuschläge $c(t, s)$ für die garantierten Zahlungen zur Zeit t die Terminzinsen zur Zeit t einschließen. Die individuelle Gewinnzuteilungsmöglichkeit ist der Marktwert der Sicherheitszuschläge auf die garantierten Zahlungen.

8 Arbitrage-freie Preisgestaltung

Unter Arbitrage-freier Preisgestaltung versteht man Preise, die jede Arbitrage-Möglichkeit ausschließen, denn würden Arbitrage-Möglichkeiten existieren, gäbe es nur Käufer für das billige Wertpapier und nur Verkäufer für das teure Wertpapier.

Dieses Kapitel liefert eine Einführung in das No-Arbitrage Prinzip, dessen Hauptidee ist, dass die Preise der gehandelten *Assets* so bestimmt werden, dass keine risikofreien Gewinne entstehen.

8.1 Ein Beispiel zu Arbitrage

Es gibt zwei gehandelte *Assets* S^0 und S^1 . Die Werte der beiden zur Zeit 0 sind gleich, das heißt, dass $S^0(0) = S^1(0)$ ist. Weiters nehmen wir an, dass wir mit Wahrscheinlichkeit 1 wissen, dass $S^0(T) \geq S^1(T)$ und $P(S^0(T) > S^1(T)) > 0$ ist.

Zur Zeit 0 kaufen wir eine Einheit von *Asset 0* und verkaufe eine Einheit von *Asset 1*. Zur Zeit T führt dies zu dem Gewinn $V = S^0(T) - S^1(T) \geq 0$. Aufgrund der obigen Annahmen ist $P(V \geq 0) = 1$ und $P(V > 0) > 0$, was folgende Konsequenzen hat.

Zur Zeit T erhalten wir $V \geq 0$, obwohl wir einen Gesamtpreis von 0 zur Zeit $t = 0$ haben. Das heißt im Grunde, dass wir ein Lotterielos gratis bekommen haben.

8.2 Gehandelte Wertpapiere

Wir betrachten hier einen Finanzmarkt mit zwei gehandelten *Assets*, deren Preise zur Zeit t $S^0(t)$ und $S^1(t)$ sind. Es ist natürlich nicht allzu schwierig dieses Modell auf mehrere Wertpapiere anzuwenden, dies würde allerdings jetzt die Notation usw. verkomplizieren. Wir nehmen hier an, dass zukünftige Preise grundsätzlich nicht bekannt sind. Das heißt, dass die Preise zur Zeit u , beschrieben durch die Zufallsvariablen $(S^0(u), S^1(u))$, vor dem Zeitpunkt u nicht bekannt sind.

Der Preis für das Wertpapier i in diskreter Zeit, $S^i = (S^i(t))_{t \in \{0,1,\dots,T\}}$, ist ein Beispiel für einen **stochastischen Prozess**. Um die Übersicht zu behalten, was zur Zeit t bekannt ist, führen wir eine **Filtration** $\mathbf{F} = (\mathcal{F}(t))_{t \in \{0,1,\dots,T\}}$ ein, wobei $\mathcal{F}(t)$ die Information ist, die zur Zeit t bekannt ist. Die Summe der Information ist nicht-fallend, so dass $\mathcal{F}(t) \subseteq \mathcal{F}(u)$ für $t < u \leq T$. Mathematisch gesehen ist eine Filtration eine wachsende Folge von σ -Algebren. S^i heißt **adaptiert** zur Filtration \mathbf{F} , wenn der Preis des Wertpapiers i zur Zeit t ein Teil der Information $\mathcal{F}(t)$ ist. Mathematisch heißt dies, dass $S^i(t)$

$\mathcal{F}(t)$ -messbar ist.

Ein stochastischer Prozess heißt **vorhersehbar**, wenn sein Wert zur Zeit t bereits zur Zeit $t - 1$ bekannt ist. Jeder vorhersehbarer Prozess ist also adaptiert.

Wir nehmen an, dass S^0 die Entwicklung eines Sparkontos mit periodischen Zinsen $i(t)$ für $(t - 1, t]$ ist, sodass

$$S^0(t) = (1 + i(1)) \cdot \dots \cdot (1 + i(t)),$$

wobei $(i(t))_{t \in \{1, \dots, T\}}$ auch ein stochastischer Prozess ist. Man könnte zum Beispiel annehmen, dass S^1 der Wert einer Nullkuponanleihe ist. Den Prozess S^0 legen wir als Diskontierungsfaktor fest und führen weiters die diskontierten Preis-Prozesse X und X^0 ein, die folgendermaßen definiert sind:

$$X(t) = \frac{S^1(t)}{S^0(t)} \quad \text{und} \quad X^0(t) = \frac{S^0(t)}{S^0(t)} = 1.$$

8.3 Investitionsstrategie

Eine Investitionsstrategie ist ein zweidimensionaler Prozess $h = (h^0, h^1)$, wobei h^1 vorhersehbar ist, also $h^1(t)$ zur Zeit $t - 1$ bekannt ist. h^0 ist adaptiert, das heißt $h^0(t)$ ist zur Zeit t bekannt. $h^1(t)$ beschreibt die Anzahl von Einheiten von Wertpapier 1, die zur Zeit $t - 1$ in dem Portfolio sind. Insbesondere sind diese Wertpapiere ein Teil des Investitionsportfolios von $t - 1$ bis t . Die Bedingung der Vorhersehbarkeit von h^1 sichert ab, dass die Anzahl der *Assets*, die wir von $t - 1$ bis t haben, zur Zeit $t - 1$ bestimmt wird, basierend auf der Information, die zu dieser Zeit verfügbar ist. Im Gegensatz dazu soll das Guthaben h^0 am Sparkonto nur adaptiert sein, sodass das Guthaben zur Zeit t festgelegt werden kann, basierend auf der zusätzlichen Information, die von $t - 1$ bis t entsteht. Das Paar $h(t) = (h^0(t), h^1(t))$ nennt man auch das Portfolio zur Zeit t .

Das Portfolio des Versicherungsunternehmens zur Zeit $t - 1$ ist

$$h(t - 1) = (h^0(t - 1), h^1(t - 1)).$$

Also erhalten wir $h^1(t - 1)$ Nullkuponanleihen und ein Guthaben auf dem Sparkonto mit einem Wert von $h^0(t - 1)S^0(t - 1)$. Der diskontierte Wert des Portfolios $h(t - 1)$ zur Zeit $t - 1$, wobei das Sparkonto S^0 der Diskontierungsfaktor ist, ist definiert durch

$$\begin{aligned} V(t - 1, h) &= S^0(t - 1)^{-1}(h^1(t - 1)S^1(t - 1) + h^0(t - 1)S^0(t - 1)) \\ &= h^1(t - 1)X(t - 1) + h^0(t - 1). \end{aligned}$$

Der Prozess $(V(t, h))_{t \in \{0, 1, \dots, T\}}$ wird auch der (diskontierte) Wertprozess genannt.

8.4 Der Kostenprozess

Es ist sehr wichtig die Veränderungen des Wertprozess zu beschreiben und zu beobachten, ob diese Veränderungen auf Grund von Erträgen aus Kapitalanlagen passieren oder ob neues Kapital dazugekommen ist. Aus diesem Zweck führen wir den sogenannten Kostenprozess ein. Dieser Prozess kann für die Konstruktion von Risiko-minimierenden Strategien eingesetzt werden. Wir betrachten wieder das Intervall $(t - 1, t]$. Sofort nach dem Zeitpunkt $t - 1$, wird das Portfolio $h(t - 1)$ angepasst, sodass der Hedger nun $h^1(t)$ Anleihen besitzt. Dies wird erreicht, indem man zusätzliche $h^1(t) - h^1(t - 1)$ Anleihen kauft, was zu den diskontierten Kosten

$$(h^1(t) - h^1(t - 1))X(t - 1)$$

führt. Der Hedger besitzt das neue Portfolio $(h^0(t), h^1(t - 1))$ bis zur Zeit t , wenn neue Preise $(S^0(t), S^1(t))$ erscheinen und er daher den folgenden diskontierten Gewinn erhält:

$$h^1(t)(X(t) - X(t - 1)).$$

Schließlich entscheidet der Hedger, das Guthaben des Sparkontos von $h^0(t - 1)S^0(t)$ auf $h^0(t)S^0(t)$ zu ändern, basierend auf der zusätzlichen Information, die zur Zeit t verfügbar ist. Diese Veränderung führt zu den zusätzlichen diskontierten Kosten $h^0(t) - h^0(t - 1)$. Also kann die Änderung im Wert des Investitionsportfolios folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} V(t, h) - V(t - 1, h) &= (h^1(t) - h^1(t - 1))X(t - 1) \\ &+ h^1(t)(X(t) - X(t - 1)) + (h^0(t) - h^0(t - 1)). \end{aligned}$$

Der erste und der letzte Term auf der rechten Seite repräsentieren die Kosten des Hedgers, während der zweite die Gewinne handelt, die durch die Strategie h während der Zeit $(t - 1, t]$ erhalten wurden. Der Kostenprozess der Strategie h ist

$$C(t, h) = V(t, h) - \sum_{s=1}^t h^1(s)\Delta X(s), \quad (32)$$

wobei $\Delta X(s) = X(s) - X(s - 1)$ ist. Der Kostenprozess ist definiert als Wert der Strategie, verringert durch das Handeln von Gewinnen. Der Kostenprozess erfüllt folgende Relation:

$$V(t, h) = V(t - 1, h) + h^1(t)(X(t) - X(t - 1)) + (C(t, h) - C(t - 1, h)),$$

was sich mit Gleichung über die Änderung im Wert des Investitionsportfolios deckt. Man sollte beachten, dass $C(0, h) = V(0, h)$ ist, was bedeutet, dass die Anfangskosten mit dem zur Zeit 0 investierten Betrag übereinstimmen.

8.5 Selbstfinanzierende Strategien

Eine Strategie nennt man selbstfinanzierend, wenn die Veränderung im Wertprozess durch das Handeln von Gewinnen erzeugt wird, das heißt, wenn das Portfolio während der beobachteten Periode nicht durch Kapitalzuwanderungen oder -abwanderungen beeinflusst wird. Das bedeutet, dass alle Veränderungen im Portfolio auf Kosten-neutralem Weg gemacht werden müssen, in dem Sinn, dass der Erwerb von zusätzlichen Anleihen finanziert werden muss, indem man das Guthaben am Sparkonto durch einen ähnlichen Betrag reduziert. Daraus folgt

$$V(t, h) = V(0, h) + \sum_{s=1}^t h^1(s) \Delta X(s) \quad (33)$$

für alle t . Indem man diese Gleichung in (32) einsetzt, sieht man, dass der Kostenprozess konstant und gleich $V(0, h)$ ist. Dies charakterisiert die Selbstfinanzierungsstrategien in Form von einem Kostenprozess.

Arbitrage ist eine Selbstfinanzierungsstrategie h , sodass

$$V(0, h) = 0, \quad P(V(T, h) \geq 0) = 1 \quad \text{und} \quad P(V(T, h) > 0) > 0. \quad (34)$$

Mit dieser Strategie, kann man null Einheiten zur Zeit 0 investieren und dennoch zur Zeit T einen nicht-negativen Betrag $V(T, h)$ erhalten. Es ist als würde man ein gratis Lotterielos erhalten.

8.6 Äquivalente Martingal-Maße und Arbitragefreiheit

8.6.1 Äquivalente Martingal-Maße

Der erste Fundamentalsatz der Preistheorie besagt, dass der Markt genau dann arbitragefrei ist, wenn es ein äquivalentes Martingalmaß gibt. Bevor wir uns aber mit dem Konzept der äquivalenten Martingalmaße beschäftigen, wiederholen wir kurz den Begriff des Martingals:

X ist der diskontierte Preisprozess, also das Verhältnis zwischen dem Preis der Anleihe S^1 und dem Wert S^0 einer Einheit des Sparkontos, investiert zur Zeit 0. Der erwartete (diskontierte) Preis der Anleihe zur Zeit u ist, je nachdem welches Wahrscheinlichkeitsmaß man benutzt, entweder $E^P[X(u)]$, wenn wir P nehmen, und $E^Q[X(u)]$, wenn wir Q verwenden. Also ist der erwartete,

diskontierte Preis unter Q für die Anleihe zur Zeit u unter Berücksichtigung von $\mathcal{F}(t)$, der Information, die zur Zeit $t < u$ verfügbar ist, gegeben durch

$$E^Q[X(u)|\mathcal{F}(t)]. \quad (35)$$

Der Prozess X wird nun Martingal (unter Q) genannt, wenn der Ausdruck (35) genau mit dem diskontierten Preis $X(t)$ zur Zeit t übereinstimmt, das heißt, wenn

$$E^Q[X(u)|\mathcal{F}(t)] = X(t) \quad (36)$$

für alle $t \leq u$. Wenn X ein Markov Prozess ist, gilt

$$E^Q[X(u)|X(t)] = X(t). \quad (37)$$

Wenn $X(t)$ und $X(u)$ diskontierte Preise einer Anleihe zur Zeit t (heute) und zur Zeit u (morgen) sind und wenn Q ein Martingalmaß ist, dann sind die Preise für heute und morgen identisch.

Ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q nennt man ein äquivalentes Martingalmaß, wenn X ein Martingal unter Q ist (d.h. wenn Gleichung (36) für alle $t < u$ erfüllt ist). Es muss betont werden, dass der diskontierte Anleihenpreis X üblicherweise kein Martingal unter dem wahren Wahrscheinlichkeitsmaß P ist, sodass P normalerweise nicht als äquivalentes Martingalmaß verwendet werden kann. P ist auf jeden Fall sehr wichtig, da es die Ereignisse bestimmt, die vollkommen unwahrscheinlich sind, das heißt Ereignisse mit Wahrscheinlichkeit 0.

Annahme: Es existiert mindestens ein äquivalentes Martingalmaß.

8.6.2 Martingalmaße garantieren Arbitragefreiheit

Es ist nicht sehr schwierig zu zeigen, dass die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes die Möglichkeit von Arbitrage ausschließt. Wir betrachten ein äquivalentes Martingalmaß Q , sodass der diskontierte Preisprozess X ein Q -Martingal ist, das heißt für alle $t < u \in \{0, 1, \dots, T\}$ gilt $E^Q[X(u)|\mathcal{F}(t)] = X(t)$. Wir wollen nun zeigen, dass keine selbstfinanzierenden Strategien h existieren können mit $V(0, h) = 0$, bei denen

$$V(T, h) = V(0, h) + \sum_{s=1}^T h^1(s) \Delta X(s) \quad (38)$$

nicht-negativ und mit einer Wahrscheinlichkeit größer 0 strikt positiv ist. Um zu sehen, dass solche Strategien nicht existieren können, ist es ausreichend zu zeigen, dass

$$E^Q[V(T, h)] = V(0, h). \quad (39)$$

Aber warum schließt dies die Arbitrage-Möglichkeit aus?

Wenn $V(T, h) \geq 0$ und $E^Q[V(T, h)] = V(0, h) = 0$ ist, folgt daraus, dass $Q(V(T, h) = 0) = 1$ und daher $P(V(T, h) = 0) = 1$ ist, da ja P und Q äquivalent sind.

Wir müssen aber immer noch zeigen, dass die Gleichung (39) für jede selbstfinanzierende Strategie h ausreicht. Dazu benötigen wir die spezielle Darstellung von h , die garantiert, dass h vorhersehbar ist:

$$E^Q[h^1(s)\Delta X(s)|F(s-1)] = h^1(s) \underbrace{E^Q[\Delta X(s)|F(s-1)]}_{=X(s-1)-X(s-1)} = 0,$$

da $h^1(s)$ $\mathcal{F}(s-1)$ -messbar ist und X ein Q -Martingal ist. Dies zeigt, dass der Wertprozess aus Gleichung (33) auch ein Q -Martingal ist, das heißt

$$E^Q[V(u, h)|F(t)] = V(t, h),$$

für alle $t \leq u$. Wenn wir nun $u = T$ und $t = 0$ setzen, sehen wir, dass

$$E^Q[V(T, h)] = V(0, h).$$

Daher existiert keine Strategie h , die eine Arbitragemöglichkeit nach der Definition in Gleichung (34) darstellt.

9 Modelle für den Kassakurs in stetiger Zeit

Zinsmarktmodelle besitzen zwei Besonderheiten, die ihnen einen eigenen Charakter verleihen. Zum einen gibt es mehrere natürliche Numeriare und vor allem wird der Markt durch die Betrachtung unendlich vieler gehandelter Wertpapiere idealisiert. Zinsmodelle sind vor allem deshalb notwendig, da man den Preis P vom Markt ablesen könnte, aber keine t_i -Anleihen verfügbar wären. Wir nehmen an, dass die Veränderung bei einem Kassakurs während eines kleinen Zeitintervalls $(t, t + \Delta t]$ wie folgt approximiert werden kann:

$$r(t + \Delta t) - r(t) = \Delta r(t) \approx v(t, r(t))\Delta t + \sigma(t, r(t))\Delta \bar{W}(t). \quad (40)$$

wobei $\Delta \bar{W}(t) = \bar{W}(t + \Delta t) - \bar{W}(t)$ ist und v und σ bekannte Funktionen sind. Weiters nehmen wir an, dass \bar{W} eine Brown'sche Bewegung ist, was bedeutet, dass \bar{W} unabhängige, normalverteilte Inkremente hat mit $\bar{W}(t) - \bar{W}(s) \sim N(0, t - s)$. Das bedeutet, dass $\Delta \bar{W}(t) \sim N(0, \Delta t)$.

Um zu zeigen, dass (40) wirklich nur für sehr kleine Zeitintervalle gültig ist, können wir auch folgende Notation verwenden:

$$dr(t) = v(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))d\bar{W}(t). \quad (41)$$

Diese Gleichung können wir integrieren und r wie folgt schreiben:

$$r(t) = r(0) + \int_0^t v(s, r(s))ds + \int_0^t \sigma(s, r(s))d\bar{W}(s). \quad (42)$$

Das Sparkonto S^0 ist definiert, indem man $S^0(0) = 1$ und $dS^0(t) = r(t)S^0(t)dt$ zulässt. Dann ist

$$S^0(t) = \exp\left(\int_0^t r(\tau)d\tau\right).$$

$\mathcal{F}(t)$ ist die Information, die zur Zeit t verfügbar ist.

$$\mathcal{F}(t) = \sigma\{\bar{W}(u), u \leq t\},$$

das bedeutet, dass wir die Brown'sche Bewegung \bar{W} beobachten, was mit der Beobachtung des Zinses r übereinstimmt.

Wir haben bereits gezeigt, dass die Preise der Nullkuponanleihen wie der erwartete Wert unter einem äquivalenten Martingalmaß Q berechnet werden können. Insbesondere werden die Preise nicht durch das Wahrscheinlichkeitsmaß P bestimmt. Wir betrachten nun das Martingalmaß Q und nehmen an, dass

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t), \quad (43)$$

wobei die Funktion v durch eine andere Funktion μ ersetzt wurde und W eine Brown'sche Bewegung unter Q ist. Mit dem Martingalmaß Q ist der Preis einer Nullkuponanleihe zur Zeit t mit Fälligkeit T gegeben durch

$$P(t, T) = E^Q \left[\frac{S^0(t)}{S^0(T)} | \mathcal{F}(t) \right] = E^Q \left[\exp\left(- \int_t^T r(\tau) d\tau\right) | \mathcal{F}(t) \right]. \quad (44)$$

Dies garantiert, dass der diskontierte Preisprozess $\frac{P(t, T)}{S^0(t)}$ ein Q -Martingal ist.

9.1 Affine Modelle

Einige klassische Beispiele von Zinssatz-Modellen der Form (43) sind das Vasicek Modell

$$dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma dW(t) \quad (45)$$

und das Cox-Ingersoll-Ross Modell

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t). \quad (46)$$

Diese zwei Modelle sind Beispiele für sogenannte affine Modelle.

Ein Zinssatz-Modell der Form (43) ist affin, wenn

$$\mu(t, r(t)) = \alpha(t)r(t) + \beta(t) \text{ und}$$

$$\sigma(t, r(t)) = \sqrt{\gamma(t)r(t) + \delta(t)},$$

wobei α, β, γ und δ bekannte Funktionen sind. Also, für fixes t sind $\mu(t, \cdot)$ und $\sigma^2(t, \cdot)$ affine Funktionen von r . Es lässt sich zeigen, dass der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeit T

$$P(t, T) = E^Q \left[\exp\left(- \int_t^T r(\tau) d\tau\right) | \mathcal{F}(t) \right] = \exp(A(t, T) - B(t, T)r(t)) \quad (47)$$

ist, wobei A und B folgende Gleichungen lösen:

$$\frac{\partial}{\partial t} B(t, T) + \alpha(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\gamma(t)(B(t, T))^2 = -1,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t, T) = \beta(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\delta(t)(B(t, T))^2,$$

mit $B(T, T) = A(T, T) = 0$. Die Gleichungen können gelöst werden, indem man zuerst die Funktion B aus der ersten Gleichung berechnet und dann in die Zweite einsetzt um A zu erhalten.

Der sofortige Terminzins ist

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \log(P(t, T)) = r(t) \frac{\partial}{\partial T} B(t, T) - \frac{\partial}{\partial T} A(t, T). \quad (48)$$

9.1.1 Das Vasicek Modell

Mit dem Modell aus Gleichung (45) bekommen wir, indem wir die Differentialgleichungen für A und B lösen, folgendes:

$$B(t, T) = \frac{1}{a}(1 - \exp(-a(T - t))),$$

$$A(t, T) = \frac{(B(t, T) - T + t)(ab - (\frac{1}{2})\sigma^2)}{a^2} - \frac{\sigma^2(B(t, T))^2}{4a}.$$

Die Terminzinsen zur Zeit t können bestimmt werden, indem man diese Gleichung bezüglich T differenziert und die Ergebnisse dann in (48) einsetzt. Auf diese Weise kann gezeigt werden, dass

$$f(t, T) = r(t)e^{-a(T-t)} + \left(\frac{b}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(1 - e^{-a(T-t)})$$

$$+ e^{-a(T-t)} \frac{2\sigma^2 B(t, T)}{4a}.$$

Da $e^{-a(T-t)} \rightarrow 0$ für $T \rightarrow \infty$, sehen wir, dass $B(t, T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{a}$. Dies zeigt, dass die Terminzinsen aus der obigen Gleichung gegen

$$\frac{b}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2} \tag{49}$$

konvergieren, wenn die Fälligkeit gegen unendlich geht. Das Vasicek Modell hat die unglückliche Eigenschaft, dass es negative Zinssätze zulässt. Ebenso werden auch die Terminzinsen negativ. Dies ist ein Phänomen, das für große Werte von σ sehr wahrscheinlich ist.

9.1.2 Das Cox-Ingersoll-Ross Modell

Bei dem Cox-Ingersoll-Ross Modell ist dies nicht der Fall, da dieses keine negativen Zinssätze zulässt. Mit dem Modell aus (46) erhalten wir

$$B(t, T) = \frac{2(\exp(\xi(T-t))-1)}{(\xi+a)(\exp(\xi(T-t))-1)+2\xi},$$

$$A(t, T) = \frac{2ab}{\sigma^2} \log\left(\frac{2\xi \exp((a+\xi)\frac{T-t}{2})}{(\xi+a)(\exp(\xi(T-t))-1)+2\xi}\right),$$

wobei $\xi = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$.

Die Terminzinsen können wieder durch die obige Gleichung für $f(t, T)$ bestimmt werden. Die Formeln dieses Modells sind um einiges schwieriger als die im Vasicek Modell.

10 Marktwerte

Im letzten Kapitel wurde gezeigt, dass der Preis zur Zeit t einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeit n geschrieben werden kann als

$$P(t, n) = E^Q \left[\frac{S^0(t)}{S^0(n)} | \mathcal{F}(t) \right],$$

wobei der Erwartungswert berechnet wird, indem man ein äquivalentes Martingalmaß Q verwendet. Dieses Ergebnis kann jetzt verwendet werden, um den Marktwert zur Zeit t der garantierten Zahlungen zur Zeit u zu berechnen:

$$\begin{aligned} V^g(t, u) &= b^a(t) E^Q \left[\frac{S^0(u)}{S^0(n)} | \mathcal{F}(u) \right]_{n-u} p_{x+u} \\ &+ \int_u^n E^Q \left[\frac{S^0(u)}{S^0(s)} | \mathcal{F}(u) \right]_{s-u} p_{x+u} (\mu(x+s) b^{ad} - \pi) ds. \end{aligned}$$

Dies kann umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} V^g(t, u) &= E^Q \left[b^a(t) \frac{S^0(u)}{S^0(n)} \right]_{n-u} p_{x+u} \\ &+ \int_u^n \frac{S^0(u)}{S^0(s)} \left[\right]_{s-u} p_{x+u} (\mu(x+s) b^{ad} - \pi) ds | \mathcal{F}(u) \Big]. \end{aligned}$$

In Modellen, wo der Zinssatz fortlaufend erhöht wird, kann man benutzen, dass

$$\frac{S^0(u)}{S^0(s)} = \exp \left(- \int_u^s r(\tau) d\tau \right),$$

um (50) umzuschreiben in

$$\begin{aligned} V^g(t, u) &= E^Q \left[b^a(t) \exp \left(- \int_u^n r(\tau) d\tau \right) \right]_{n-u} p_{x+u} \\ &+ \int_u^n \exp \left(- \int_u^s r(\tau) d\tau \right) \left[\right]_{s-u} p_{x+u} (\mu(x+s) b^{ad} - \pi) ds | \mathcal{F}(u) \Big]. \end{aligned}$$

In diesen Situationen werden die Marktwerte wie der Erwartungswert unter einem äquivalenten Martingalmaß berechnet. Die einzige Zufälligkeit in dieser Gleichung ist, dass sie mit der Entwicklung des Zinssatzes zusammenhängt. Es ist auch möglich mit dem Zahlungsprozess $B(t, s)$ zu arbeiten, welcher

die Zahlungen, garantiert zur Zeit t , beschreibt. Dieser Prozess ist definiert durch

$$dB(t, s) = -\pi I(s)ds + b^{ad}dN(s) + b^a(t)I(s)d\varepsilon(s, n),$$

wobei $I(s)$ der Indikator für das Ereignis ist, dass der Versicherte zur Zeit s lebt. N ist ein Zählprozess, der die Anzahl der Tode zählt und $\varepsilon(s, n) = 1$ für $s \geq n$ und sonst 0. Mit dieser Notation folgt aus der obigen Gleichung für $V^g(t, u)$:

$$V^g(t, u) = E^Q \left[\int_u^n \exp\left(-\int_u^s r(\tau)d\tau\right) dB(t, s) | \mathcal{F}(u) \right]. \quad (50)$$

Nun treten die Unsicherheit, die mit der Lebensdauer des Versicherungsnehmers zusammenhängt und die, die mit der künftigen Entwicklung des Zinssatzes zusammenhängt, gleichzeitig auf.

Dieses Kapitel hat sich mit der Herleitung des Marktwertes für garantierte Zahlungen in Situationen, wo die Zinsrate stochastisch ist, beschäftigt. Hierbei ist es normal, den üblichen Diskontierungsfaktor durch Nullkuponanleihenpreise zu ersetzen.

11 Literatur

[M-S] Thomas Möller und Mogens Steffensen: International Series on Actuarial Science - *Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.