

Optimale Rückversicherung

Sabine Polzer

21. Jänner 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung: Rückversicherung	1
2	Gründe und Formen für eine Rückversicherung	1
2.1	Formen der proportionalen Rückversicherung	3
2.2	Formen der nichtproportionalen Rückversicherung	4
3	Entscheidung über Form und Umfang der Risikoteilung	5
4	Modelle zur Bewertung von Risikoteilungen	7
5	Einseitige Optimierung bei gegebenen Transaktionskosten	11
6	Abstaffelung des Selbstbehalts	17
7	Suboptimale und pareto-optimale Risikoteilung	21
8	Fazit	26

1 Einleitung: Rückversicherung

Zuerst möchte ich kurz den Begriff „Rückversicherung“ erklären:

Eine Rückversicherung ist eine Versicherung, die Versicherungsgesellschaften abschließen. Sie findet statt, wenn die Deckung für ein Einzelrisiko oder ein ganzes Portfolio (Vielzahl von Einzelrisiken mit gemeinsamen Merkmalen) ganz oder teilweise unter den ursprünglichen oder neuen Bedingungen von einem Versicherer, im Allgemeinen einer Versicherungsgesellschaft, auf einen anderen Versicherer (meist eine spezielle Rückversicherungsgesellschaft) übertragen wird und zwar ohne Auflösung der ursprünglichen Versicherung.

2 Gründe und Formen für eine Rückversicherung

Der Grund für das Funktionieren von Versicherung ist der sogenannte *Ausgleich im Kollektiv*. Damit ist die Tatsache gemeint, dass die Zusammenfassung (Kollektiv, Portefeuille) mehrerer nicht vollständig positiv korrelierter Risiken (Policen) zu einer Schadenverteilung und Prämieinnahme führt, die im Allgemeinen gegenüber jedem Einzelrisiko vorteilhafter ist, weil sich im Kollektiv günstige und ungünstige (im Vergleich zum individuellen Erwartungswert) Schadenverläufe der Einzelrisiken ausgleichen können. Der Ausgleich im Kollektiv verringert zwar das Schätz- und Zufallsrisiko des Versicherungsunternehmens, aber es verbleibt dennoch ein nicht unerhebliches Restrisiko. Wenn das Versicherungsunternehmen nun feststellt, dass seine (Netto-)Prämieinnahme b , seine Gesamtschadenverteilung G und sein Sicherheitskapital c zu einer Sicherheitswahrscheinlichkeit $G(b + c)$ führen, die ihm zu niedrig ist, so kann es sich seinerseits Versicherungsschutz kaufen, bei anderen Versicherungsunternehmen oder bei dafür spezialisierten Rückversicherungsunternehmen.

Diese Möglichkeit, einen Teil der übernommenen ungewissen Schadenkosten

wieder durch fixe Kosten zu ersetzen, wird **Rückversicherung** genannt; sie ist in der Regel einfacher als die Alternativen Erhöhung der Prämieinnahme, Erhöhung des Sicherheitskapitals oder Verbesserung der Gesamtschadenverteilung (z.B.: durch Bedingungsänderung oder Kündigung einzelner Risiken) und erlaubt es dem Erstversicherer, auch Risiken zu akquirieren, die wegen ihrer Größe seinen Ausgleich eher verschlechtern. Primär kann durch Rückversicherung also eine Verringerung des versicherungstechnischen Risikos bewirkt werden. Anhand des Vergleichs mit den genannten Alternativen kann man aber auch sagen, dass Rückversicherung als Ersatz für eine Sicherheitskapitalerhöhung angesehen werden kann. Jedes Versicherungsunternehmen, das einem anderen Versicherungsunternehmen Versicherungsschutz gewährt, wird in diesem Zusammenhang als *Rückversicherer* bezeichnet, während das Unternehmen, das die Originalpolicen ausstellt, *Erstversicherer* genannt wird.

In der Praxis hat nahezu jedes Versicherungsunternehmen Rückversicherungsverträge mit einem oder mehreren Rückversicherern abgeschlossen. Der Rückversicherer hat keine Vertragsbeziehung mit den Versicherungsnehmern, der bei ihm rückversicherten Policen, und diese wissen auch nicht, ob sie rückversichert sind, denn der Erstversicherer ist auch bei rückversicherten Policen weiterhin voll für Prämienfestsetzung und Schadenregulierung zuständig.

Im Prinzip könnten sich Erst- und Rückversicherer Police für Police über Art und Umfang der Risikoteilung einigen. Einzelne Großrisiken werden in der Tat auch in dieser Weise zwischen mehreren Versicherungsunternehmen aufgeteilt (fakultative Rückversicherung). Aber der weitaus überwiegende Teil der Rückversicherung erfolgt innerhalb eines Vertrags zwischen Erst- und Rückversicherer, in dem für alle im Vertragszeitraum im Portefeuille des Erstversicherers befindlichen Risiken genau festgelegt ist, welchen Teil welcher Risiken bzw. Schäden der Rückversicherer zu tragen hat und welche Prämie er dafür erhält (obligatorische Rückversicherung). Rückversicherungsverträge laufen üblicherweise ein Jahr und beziehen sich aus Gründen der Transparenz meist nur auf eine einzige Branche. Für die Aufteilung der

Risiken bzw. Schäden haben sich folgende fünf Formen herausgebildet:

2.1 Formen der proportionalen Rückversicherung

1. *Quoten-Rückversicherung*: Der Rückversicherer übernimmt einen festen, überall gleichen Prozentsatz von allen Policen.
2. *Summenexzedenten-Rückversicherung*: Während das Aufteilungsverhältnis $c : (1 - c)$ zwischen Erst- und Rückversicherer bei der Quoten-Rückversicherung bei allen Risiken gleich ist, variiert es beim Summenexzedenten in Abhängigkeit von der Versicherungssumme v des jeweiligen Risikos derart, dass der Selbstbehaltsanteil $c = c(v) = \min(v_0/v, 1)$ beträgt, d.h. der Erstversicherer behält Risiken mit Versicherungssumme $v \leq v_0$ ganz selbst und beteiligt den Rückversicherer nur bei Risiken mit Versicherungssummen über v_0 und zwar derart, dass der Rückversicherer jeweils den Anteil übernimmt, der der über v_0 hinausgehenden Versicherungssumme entspricht. Ansonsten ist alles wie bei der Quoten-Rückversicherung, d.h. pro Risiko mit Versicherungssumme v werden Prämien und Schäden im Verhältnis $c(v)$ zu $1 - c(v)$ aufgeteilt. Es handelt sich also um eine rein proportionale Risikoteilung, wobei aber der Selbstbehaltsanteil $c(v)$ nicht in proportionaler Weise von der Versicherungssumme v abhängt. Durch Vereinbarung einer Summenexzedenten-Rückversicherung wird eine Homogenisierung bzw. Stützung der Versicherungssummen im Selbstbehalt des Erstversicherers bewirkt. Üblicherweise wird im Rückversicherungsvertrag noch die vom Rückversicherer zu übernehmende Versicherungssumme durch einen Maximalbetrag mv_0 begrenzt, d.h. der Rückversicherer übernimmt von einem Risiko mit Versicherungssumme v nicht den Anteil $1 - c(v)$, sondern

$$\min(1 - c(v), mv_0/v) = \min(\max(v - v_0, 0), mv_0)/v$$

mit einem in der Regel ganzzahligen $m \geq 1$. Dadurch weiß der Rückversicherer bereits bei Vertragsabschluss, dass er pro Einzelschaden unabhängig vom betroffenen Risiko, auf keinen Fall mehr als den Betrag

mv_0 zu bezahlen hat.

2.2 Formen der nichtproportionalen Rückversicherung

1. *Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung*: Hierbei trägt der Erstversicherer von allen Schäden X , egal von welchem der unter den Vertrag fallenden Risiken, das Erstrisiko $\min(X, a_0)$ bis zu einem vereinbarten Höchstbetrag a_0 , *Priorität* genannt, selbst, während der Rückversicherer den etwa übersteigenden Teil $\max(X - a_0, 0)$ zu zahlen hat, in der Regel ebenfalls nur bis zu einem vereinbarten Höchstbetrag a_1 , also $\min(\max(X - a_0, 0), a_1)$. Ein etwaiger Schadenteil oberhalb $a_0 + a_1$, also $\max(X - a_0 - a_1, 0)$ geht wieder zu Lasten des Erstversicherers, falls nicht eine weitere Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung mit Priorität $a_0 + a_1$ besteht. Bei allen vom Rückversicherungsvertrag gedeckten Risiken gelten üblicherweise dieselben Beträge a_0 und a_1 . Damit ist die Aufteilung der Schäden geregelt. Die dem Rückversicherer zustehende Prämie hängt von der vermuteten Anzahl und Höhe von Schäden über a_0 sowie der Höhe von a_1 ab und ist letztlich Verhandlungssache.
2. *Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung*: Diese Rückversicherungsform ist völlig analog zur Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung mit der Ausnahme, dass sich der Schadenbetrag X , der der Priorität gegenübergestellt wird, auf die Summe aller Einzelschäden des Erstversicherers aus einem einzelnen Schadenereignis (z.B.: Sturm, Erdbeben) bezieht.
3. *Jahresüberschaden-Rückversicherung oder Stop-Loss*: Dies ist die Fortsetzung des Prinzips der Schadenexzedenten-Rückversicherung vom Einzelschaden über den Kumulschaden auf den Jahresschaden. Übersteigt der Gesamtschaden S des Erstversicherers aus einem Jahr (und einer Branche) die vereinbarte Priorität s_0 , so übernimmt der Rückversicherer den übersteigenden Teil bis zu einer vereinbarten Höchstgrenze s_1 , d.h. der Erstversicherer trägt $\min(S, s_0) + \max(S - s_0 - s_1, 0)$, der Rückversicherer $\min(\max(S - s_0, 0), s_1)$. Wenn – wie in der Praxis meist

der Fall – Gesamtschäden oberhalb $s_0 + s_1$ sehr unwahrscheinlich sind, gewährt diese Rückversicherungsform dem Erstversicherer offenkundig den umfassendsten Schutz, indem sie sein Schadenpotenzial auf a_0 begrenzt, sodass das versicherungstechnische Risiko fast vollständig auf den Rückversicherer übergeht.

Die genannten Rückversicherungsformen werden - auch innerhalb einer einzelnen Branche - häufig miteinander kombiniert, um so Schutz gegen das *Frequenzrisiko* (durch Quote und Kumulschadenexzedent oder Stop-Loss) und das *Großschadenrisiko* (durch Summenexzedent und Einzelschadenexzedent) zu erreichen.

3 Entscheidung über Form und Umfang der Risikoteilung

Man unterscheidet in der Risikoteilung im Wesentlichen die beiden Grundformen, proportionale Risikoteilung und nichtproportionale Risikoteilung: Bei der *proportionalen Risikoteilung* wird die Schadenvariable X (entweder die Schadenhöhe pro Schadenfall oder der Jahresgesamtschaden) in der Form

$$X = cX + (1 - c)X, \quad 0 < c < 1,$$

in die beiden Teile cX und $(1 - c)X$ aufgeteilt.

Bei der *nichtproportionalen Risikoteilung* wird die Schadenvariable X in der Form

$$X = \min(X, a) + \max(X - a, 0), \quad a > 0,$$

in das Erstrisiko $\min(X, a)$ und das Zweitrisko $\max(X - a, 0)$ aufgeteilt.

Während bei der proportionalen Risikoteilung stets beide Seiten involviert sind, ist bei nichtproportionaler Risikoteilung das Zweitrisko nicht involviert, wenn die Teilungsgrenze a vom Schaden nicht überschritten wird.

Bei jeder Risikoteilung sind von beiden involvierten Seiten zwei prinzipielle Entscheidungen zu treffen: Zum einen ist die Form der Risikoteilung

festzulegen, z.B.: proportional $X = cX + (1 - c)X$ oder nichtproportional $X = \min(X, a) + \max(X - a, 0)$, und ob sich X auf den Einzel-, Kumul- oder Jahresschaden bezieht. Zum anderen ist der Umfang der Risikoteilung festzulegen, also z.B.: bei rein proportionaler Risikoteilung das Aufteilungsverhältnis $c : (1 - c)$ oder bei rein nichtproportionaler Risikoteilung die Höhe der Schadengrenze a .

In der Erstversicherung, insbesondere im Massengeschäft, werden praktisch nur genormte Versicherungsverträge angeboten, sodass der Entscheidungsspielraum des Versicherungsnehmers oft nur zwischen den Extrema „vollständiger Risikotransfer“ oder „vollständige Risikoselbsttragung“ besteht. In der Rückversicherung hingegen sind die beiden Vertragspartner gleichberechtigt und schließen miteinander eine individuelle Risikoteilungsvereinbarung ab, sodass tatsächlich weitgehende Entscheidungsfreiheit besteht.

Ein Rückversicherungsvertrag wird üblicherweise für ein Jahr abgeschlossen und regelt die Teilung des Jahresgesamtschadens S des Erstversicherers in einer bestimmten Versicherungssparte. Dabei wird ein Teil R , $0 < R < S$, von S auf den Rückversicherer transferiert im Gegenzug für eine Prämie $b(R)$.

Bezeichnet b die zu S gehörende, um Akquisitions- und Verwaltungskosten gekürzte Prämieeinnahme des Erstversicherers, so hat dieser das betriebswirtschaftliche Ergebnis

$$b - S \quad \text{vor Rückversicherung}$$

mit dem Ergebnis

$$b - S - (b(R) - R) - k_1 \quad \text{nach Rückversicherung}$$

zu vergleichen, wobei k_1 die durch die Rückversicherung eventuell zusätzlich verursachten (Verwaltungs-)Kosten des Erstversicherers sind. (Alle Beträge seien auf den Zeitpunkt des Vertragsbeginns diskontiert.) k_1 kann von Form und Umfang der Rückversicherung abhängen.

Der Rückversicherer hat als betriebswirtschaftliches Ergebnis aus die-

sem Vertrag 0 **vor** Vertragsabschluss und $b(R) - R - k_2$ **nach** Vertragsabschluss, wobei k_2 seine, auf diesen Vertrag entfallenden Akquisitions- und Verwaltungskosten, sind (einschließlich seines kalkulatorischen Schwankungszuschlags).

$b(R)$ muss also mindestens so hoch sein wie $E(R) + k_2$, wenn der Rückversicherer nicht auf Dauer Verlust machen will. Auch k_2 kann von Art und Umfang des Rückversicherungsvertrages abhängen. Erst- und Rückversicherer zusammen haben also nach Rückversicherung ein um $k_1 + k_2$ schlechteres betriebswirtschaftliches Ergebnis als vor Rückversicherung.

Aus dieser Darstellung der Entscheidungssituation bei Rückversicherung ergeben sich zwei Probleme: Zum einen ist zu klären, ob die durch Rückversicherung entstehenden zusätzlichen *Transaktionskosten* $k_0 = k_1 + k_2$ durch *Synergieeffekte* wieder wettgemacht werden können. Zum anderen ist ein Modell zu entwickeln, anhand dessen der Erstversicherer, bezüglich eines konkreten Rückversicherungsvertrages, entscheiden kann, ob die Variante ohne Rückversicherung oder die Variante mit Rückversicherung – und wenn ja, welche – für ihn günstiger ist.

4 Modelle zur Bewertung von Risikoteilungen

In Abschnitt 2 wurde als Ursache der Rückversicherung die Tatsache genannt, dass verfügbare Prämie und Sicherheitskapital des Erstversicherers nicht zu dem von ihm gewünschten Sicherheitsniveau führen. Eine andere Möglichkeit als Rückversicherung wäre die Erhöhung des Sicherheitskapitals. Daher liegt es auf der Hand, die Möglichkeit „*Rückversicherung*“ mit der Alternative „*Erhöhung des Sicherheitskapitals*“ zu vergleichen. Bei geeigneter Rückversicherung wird ein Teil des Schwankungszuschlags frei und zur Deckung der Transaktionskosten verwendet und muss nicht zu einer Erhöhung der Originalprämien führen.

Dabei ist klar, dass sich der insgesamt vorteilhafte Transfer auch nur dann für jeden der beiden Beteiligten lohnt, wenn der Original-Schwankungszu-

schlag so aufgeteilt wird, dass jeder die bei ihm anfallenden Transaktionskosten und den nach Risikoteilung noch erforderlichen Schwankungszuschlag decken kann. Es kommt also entscheidend auf die richtige Bemessung der Rückversicherungsprämie an: Sie muss mindestens so hoch sein, dass sie Betriebskosten und Schwankungszuschlag des Rückversicherers deckt, aber höchstens so hoch, dass dem Erstversicherer genügend bleibt, um seinerseits Transaktionskosten und Schwankungszuschlag erwirtschaften zu können. Hier zeichnet sich schon ab, dass die Bemessung der Rückversicherungsprämie eine äußerst wichtige Rolle spielt.

Das Portefeuille eines Erstversicherers könnte mit der Quoten-Rückversicherung so rückversichert werden, dass bei unverändertem Kapital ein höheres Sicherheitsniveau erreicht werden könnte. Dies wäre auch mit jeder anderen Rückversicherungsform möglich, da alle Rückversicherungsformen im Prinzip Risikoteilungen jedes Umfangs zwischen „alles“ und „nichts“ zulassen. Natürlich wird der Erstversicherer diejenige Rückversicherungsform $(R, b(R))$ bevorzugen, die ihm bei gleichem Sicherheitsniveau den größten Anteil vom Schwankungszuschlag lässt. Mit den Bezeichnungen

- S = Gesamtschaden des Erstversicherers vor Rückversicherung,
- b = um Akquisitions- und Verwaltungskosten gekürzte Prämieinnahme des Erstversicherers,
- R = auf den Rückversicherer transferierter Teil von S ,
- $b(R)$ = Rückversicherungsprämie (inkl. Verwaltungskosten und Schwankungszuschlag des Rückversicherers),
- Q = $S - R$ = Selbstbehalts-Gesamtschaden des Erstversicherers,
- $b(Q)$ = $b - b(R)$ = Selbstbehaltsprämie.

lautet also das *Entscheidungsprinzip des Erstversicherers* (wobei zur einfacheren Darstellung angenommen wird, dass die Transaktionskosten k_1 des Erstversicherers in $b(R)$ stecken):

„Wähle R und $b(R)$ möglichst so, dass für den Selbstbehalt $Q = S - R$ das angestrebte Sicherheitsniveau erreicht ist und das erwartete Selbstbehaltser-

gebnis $b(Q) - E(Q) = b - b(R) - E(Q)$ maximal ist.“

Dabei interessieren wir uns jetzt nur noch für die Wahl der geeigneten Rückversicherungsform und nicht mehr für die Frage, ob die Rückversicherung überhaupt vorteilhaft für den Erstversicherer ist. Falls es (z.B. wegen hoher Rückversicherungspreise) einmal für den Erstversicherer keine vorteilhafte Rückversicherung geben sollte, muss er eben sein Sicherheitskapital oder seine Prämieinnahme erhöhen oder sich von einigen Risiken trennen oder das niedrigere Sicherheitsniveau vorübergehend akzeptieren.

Das Sicherheitsniveau bei gegebenem Sicherheitskapital c haben wir bisher mittels des *Modells der einjährigen Verlustwahrscheinlichkeit*

$$P(S > b + c) \quad \text{bzw.} \quad P(Q > b(Q) + c)$$

quantifiziert. Unter der Annahme, dass S und Q normalverteilt sind und das kalkulatorische Gewinn $b - E(S)$ bzw. $b(Q) - E(Q)$ an die Kapitalgeber ausgeschüttet wird, sind diese Wahrscheinlichkeiten gleich

$$1 - \Phi(c/Sta(S)) \quad \text{bzw.} \quad 1 - \Phi(c/Sta(Q)),$$

wenn Φ die Standard-Normalverteilung bezeichnet. In diesem Fall ist das Erreichen einer bestimmten Verlust-Wahrscheinlichkeit gleichbedeutend mit dem Erreichen einer bestimmten (niedrigen) Varianz $Var(Q) = (Sta(Q))^2$ des Selbstbehalts-Gesamtschadens. Zwar ist die Normalverteilung insbesondere bei S in der Regel nicht gegeben, doch ist die Varianz auch ohne Normalverteilung ein intuitiv einleuchtendes Sicherheitskriterium und außerdem analytisch einfacher zu behandeln als die Gesamtschadenverteilung. Daher ermöglicht das *Varianzmodell* einige interessante allgemeine Aussagen.

„Wähle R und $b(R)$ möglichst so, dass die Selbstbehaltvarianz $Var(Q)$ das angestrebte Niveau nicht überschreitet und das erwartete Selbstbehaltsergebnis $b(Q) - E(Q)$ möglichst groß ist.“

Eine weitere Möglichkeit der Quantifizierung des Sicherheitsniveaus eines Portefeuilles besteht in der so genannten Ruinwahrscheinlichkeit, die ein kontinuierliches mehrjähriges Analogon zur einjährigen Verlustwahrscheinlichkeit ist. Dieses von der Risikothorie entwickelte Kriterium hat sich jedoch in der Praxis nicht etablieren können. Da es auch analytisch nicht so leicht in den Griff zu bekommen ist, wird – wenn überhaupt – meist mit einer von Cramér/Lundberg stammenden Abschätzung gearbeitet. Dann kommt das Kriterium aber sehr in die Nähe eines Spezialfalls des *Nutzenmodells*, das die von der betriebswirtschaftlichen Entscheidungstheorie bevorzugte Vorgehensweise ist. Hierbei wird jedes mögliche Selbstbehaltsergebnis $x = b(Q) - Q$ mithilfe einer Nutzenfunktion $u(x)$ bewertet, für die $u'(x) > 0$ (d.h. je höher das Ergebnis, desto besser) und $u''(x) < 0$ gilt (d.h. eine Erhöhung des Ergebnisses um einen festen Betrag ist umso weniger erstrebenswert, je höher das Ergebnis bereits ist: Risikoaversion). Das angestrebte Sicherheitsniveau kommt in der speziellen Wahl der Nutzenfunktion u zum Ausdruck.

Gemäß dem Nutzenmodell wird die Rückversicherung so gewählt, dass der Erwartungswert des Nutzens des resultierenden Selbstbehaltsergebnisses möglichst groß wird:

„Wähle R und $b(R)$ möglichst so, dass bei gegebenem Sicherheitskapital c und gegebener Nutzenfunktion u die Nutzenerwartung $E(u(c + b(Q) - Q))$ möglichst groß ist.“

Problematisch am Nutzenmodell ist die Tatsache, dass unklar ist, welche Nutzenfunktion u der Erstversicherer seinen Entscheidungen zu Grunde legen sollte. Zwar liefert die axiomatische Fundierung der Nutzentheorie im Prinzip ein Verfahren, die Nutzenfunktion eines rational handelnden Entscheidungsträgers zu ermitteln, doch sind entsprechende Resultate für Versicherungsunternehmen nicht bekannt. Bei theoretischen Untersuchungen ist die Familie der exponentiellen Nutzenfunktionen

$$u(x) = (1 - e^{-r \cdot x})/r,$$

wobei der Parameter $r > 0$ den Grad der Risikoaversion angibt, beliebt, weil sie analytisch besonders einfach zu behandeln ist. Aber statt den Grad der Risikoaversion r festzulegen, ist es anschaulicher, das gewünschte Varianzniveau oder die einjährige Verlustwahrscheinlichkeit vorzugeben.

Schließlich ist noch anzumerken, dass das Modell mit der Verlustwahrscheinlichkeit und das Varianzmodell jeweils folgende zur vorigen äquivalenten Formulierung besitzen:

Verlustwahrscheinlichkeits-Modell:

„Wähle R und $b(R)$ möglichst so, dass $b(Q) - E(Q)$ ein angestrebtes Mindestniveau nicht unterschreitet und die Verlustwahrscheinlichkeit $P(Q > b(Q) + c)$ möglichst klein wird.“

Varianz-Modell:

„Wähle R und $b(R)$ möglichst so, dass $b(Q) - E(Q)$ ein angestrebtes Mindestniveau nicht unterschreitet und die Varianz $Var(Q)$ möglichst klein wird.“

Auch das Nutzenmodell kann bei Beschränkung auf exponentielle Nutzenfunktionen analog umformuliert werden, derart, dass bei gegebenem Mindestnutzen die Risikoaversion maximiert wird. Dass diese Formulierungen äquivalent sind, überlegt man sich leicht mittels Widerspruchsbeweis.

Die für diese Modelle ableitbaren allgemeinen Resultate sind sehr ähnlich, d.h. der Vergleich zweier verschiedener Rückversicherungsvarianten führt unter allen genannten Modellen im Allgemeinen zum gleichen Ergebnis.

5 Einseitige Optimierung bei gegebenen Transaktionskosten

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass die in der Rückversicherungsprämie $b(R)$ steckenden Transaktionskosten bei der Rückversicherungsentscheidung eine wichtige Rolle spielen, und dass ihre Höhe darüber entscheidet, ob ein Rückversicherungsvertrag aus Sicht jedes Beteiligten überhaupt sinnvoll ist. Um gemäß einem der vorgestellten Entscheidungsmodelle die opti-

male Rückversicherungsform aus Sicht des Erstversicherers finden zu können, müsste also für alle in Betracht kommende Rückversicherungsformen die Höhe der Transaktionskosten bekannt sein. In der Praxis ist das natürlich eine unrealistische Forderung. Dort kann der Erstversicherer allenfalls Angebote für einige wenige Varianten einholen und stellt dann wahrscheinlich fest, dass selbst bei diesen wenigen Varianten die Entscheidung sehr unsicher bleibt, weil er die (künftige) Verteilung seines Gesamtschadens S – und damit auch von Q und R – gerade im relevanten Großschadenbereich nicht genau genug kennt.

Wenn man auf analytischem Weg zu Antworten kommen will, muss man von einem idealisierten funktionalen Ansatz der Transaktionskosten ausgehen. Zwei solche Ansätze werden in den beiden folgenden Sätzen gemäß dem Varianzmodell analysiert. Dabei werden die *Transaktionskosten* als die Veränderung

$$\begin{aligned} k(R) &= b - E(S) - (b(Q) - E(Q)) \\ &= b(R) - E(R) \end{aligned}$$

des erwarteten betriebswirtschaftlichen Ergebnisses vor bzw. nach Rückversicherung definiert, d.h. als der im Mittel durch Rückversicherung abfließende Betrag. (Das sind formal nur die in Abschnitt 3 mit k_2 bezeichneten Kosten, doch kann, solange wir nur die Situation des Erstversicherers untersuchen, $b(R)$ auch die durch Rückversicherung beim Erstversicherer zusätzlich entstehenden Verwaltungskosten k_1 beinhalten.) Die beiden folgenden Sätze geben eine explizite Lösung für die Fälle, wo für die Transaktionskosten $k(R)$ zum Beispiel $k(R) = \alpha_1 E(R)$, $k(R) = \alpha_2 Sta(R)$ oder $k(R) = \alpha_3 Var(R)$ gilt. Dabei benutzen wir das Varianzmodell in der am Ende des vorigen Abschnitts angegebenen Form, d.h. wir gehen von einem vorgegebenen Höchstniveau der Transaktionskosten $k(R)$ aus und minimieren die Selbstbehaltsvarianz $Var(Q)$.

Satz (Borch, Kahn, Pesonen): Sind die Transaktionskosten k eine bei allen Rückversicherungsformen R gleiche Funktion g des Erwartungswerts $E(R)$,

d.h. $k(R) = g(E(R))$, so ist gemäß Varianzmodell die unlimitierte Stop-Loss-Rückversicherung optimal für den Erstversicherer.

Beweis: Die unlimitierte Stop-Loss-Rückversicherung ist bei Gesamtschaden S und Priorität $a > 0$ gegeben durch den Selbstbehaltsschaden $Q_a = \min(S, a)$ und den Rückversicherungsschaden $R_a = \max(S - a, 0)$. Sei $(R, b(R))$ eine beliebige Rückversicherungsform mit Transaktionskosten $k(R) = g(E(R))$. Dann wählen wir a so, dass $E(R_a) = E(R)$ und damit auch $k(R_a) = k(R)$ gilt. Das ist stets möglich, da $E(R_a)$ stetig monoton fallend in a ist mit $E(R_0) = E(S) \geq E(R)$ und $E(R_\infty) = 0 \leq E(R)$. Es genügt zu zeigen, dass $\text{Var}(Q_a) \leq \text{Var}(Q) = \text{Var}(S - R)$ gilt.

Zunächst nehmen wir an, dass sich der zu R gehörende Selbstbehaltsschaden $Q = S - R$ als Funktion $Q = t(S)$ des Gesamtschadens darstellen lässt, wie dies auch bei $Q_a = Q_a(S) = \min(S, a)$ der Fall ist. Mit der Verteilungsfunktion G von S gilt dann

$$\begin{aligned}
 E(Q - a)^2 &= \int_0^\infty (t(s) - a)^2 dG(s) \\
 &\geq \int_0^a (t(s) - a)^2 dG(s) \\
 &\geq \int_0^a (s - a)^2 dG(s) \quad (\text{wegen } Q \leq S) \\
 &= \int_0^a (Q_a(s) - a)^2 dG(s) \\
 &= \int_0^\infty (Q_a(s) - a)^2 dG(s) \\
 &= E(Q_a - a)^2.
 \end{aligned}$$

Wegen $E(Q_a) = E(S) - E(R_a) = E(S) - E(R) = E(Q)$ folgt daraus

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Q) &= \text{Var}(Q - a) = E(Q - a)^2 - (E(Q - a))^2 \\
&\geq E(Q_a - a)^2 - (E(Q_a - a))^2 = \text{Var}(Q_a - a) \\
&= \text{Var}(Q_a).
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz für solche Rückversicherungsformen bewiesen, bei denen sich der Erstversicherungsschaden Q als Funktion $Q = t(S)$ des Gesamtschadens S darstellen lässt. Dies ist jedoch z.B. für die Summenexzedenten- oder die Schadenexzedenten-Rückversicherung nicht erfüllt.

■

Satz (Beard, Pentikäinen, Pesonen): Sind die Transaktionskosten k eine bei allen Rückversicherungsformen gleiche monoton wachsende Funktion $k(R) = h(\text{Var}(R))$ der Varianz des Rückversicherungsschadens R , so ist gemäß dem Varianzmodell die Quoten-Rückversicherung für den Erstversicherer optimal.

Beweis: Sei $(R, b(R))$ eine beliebige Rückversicherungsform mit Transaktionskosten $k(R) = h(\text{Var}(R))$. Wir können $\text{Var}(R) \leq \text{Var}(S)$ annehmen, denn sonst ist die vollständige Quoten-Rückversicherung $R_1 = S$ trivialerweise günstiger als R . Daher gibt es ein $q \leq 1$ mit $\text{Var}(qS) = \text{Var}(R)$, und die durch das Aufteilungsverhältnis $(1 - q) : q$ von S gegebene Quoten-Rückversicherung hat dieselben Transaktionskosten wie R . Wegen der allgemeinen Eigenschaft

$$\frac{\text{Cov}(S, R)}{\text{Sta}(S) \cdot \text{Sta}(R)} \leq 1$$

des Korrelationskoeffizienten von R und S wird unter Benutzung von $\text{Var}(R) = q^2 \text{Var}(S)$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Q) &= \text{Var}(S - R) \\
&= \text{Var}(S) - 2 \cdot \text{Cov}(S, R) + \text{Var}(R) \\
&\geq \text{Var}(S) - 2 \cdot \text{Sta}(S) \cdot \text{Sta}(R) + \text{Var}(R) \\
&= \text{Var}(S) - 2q \text{Var}(S) + q^2 \text{Var}(S) \\
&= \text{Var}((1 - q)S).
\end{aligned}$$

Somit hat die Quoten-Rückversicherung bei gleichen Transaktionskosten wie R eine günstigere Varianz des Erstversicherungsschadens.

■

Diese beiden Sätze zeigen, dass die optimale Entscheidung des Erstversicherers überraschenderweise nicht von der Verteilung des Gesamtschadens S , sondern ausschließlich von der Art und Höhe der Transaktionskosten abhängt. Dagegen zeigen sie nicht, dass Stop-Loss- oder Quoten-Rückversicherung auch in der Realität die, aus Sicht der Erstversicherers, zu bevorzugenden Rückversicherungsformen sind, weil die jeweils vorausgesetzte funktionale Form der Transaktionskosten kaum realistisch ist. Dies erkennt man am klarsten, wenn man sich vor Augen hält, dass die Transaktionskosten sowohl die, durch die Rückversicherung, bedingten Verwaltungskosten von Erst- und Rückversicherer enthalten als auch den Schwankungszuschlag des Rückversicherers. Für den Schwankungszuschlag des Rückversicherers ist die Annahme einer Varianzabhängigkeit wohl nicht unrealistisch. Die Verwaltungskosten werden dagegen eher volumenabhängig sein, also etwa proportional zum Erwartungswert der Schäden, allerdings mit einer von der Rückversicherungsform abhängenden Proportionalitätskonstanten und einer durch die Fixkosten bedingten Untergrenze. Außerdem handelt es sich hierbei jeweils um die kalkulatorischen Kosten. Gemäß unserem Modell sind die Transaktionskosten aber richtigerweise definiert als die Differenz

$$k(R) = b(R) - E(R)$$

zwischen Rückversicherungsprämie (einschließlich der beim Erstversicherer etwa zusätzlich anfallenden Kosten) und dem Erwartungswert der Rückversicherungsschäden, d.h. sie beinhalten zusätzlich zu den absichtlich inkalkulierten Verwaltungskosten und Schwankungszuschlag auch noch einen unbeabsichtigten Zu- oder Abschlag durch die Verschätzung bei $E(R)$. Da in der Realität $E(R)$ aber nie genau bekannt ist, kann auch die Art des Transaktionskosten-Ansatzes letztlich nicht festgestellt werden.

Im Beweis jeder der beiden Sätze hat sich auch gezeigt, wie der Umfang der Rückversicherung (bzw. die Höhe des Selbstbehalts) bestimmt wird: Aus-

gehend von der vorgegebenen (Maximal-)Höhe der Transaktionskosten, die ja zugleich der tolerierten mittleren Ergebnisreduzierung entspricht, wird die Stop-Loss-Priorität a bzw. der Quoten-Selbstbehalt $1 - q$ gerade so festgelegt, dass sich die gewünschte Höhe des Selbstbehaltsergebnisses ergibt. Normalerweise ist die Kostenfunktion $k(R) = g(E(R))$ bzw. $k(R) = h(Var(R))$ streng monoton wachsend in $E(R)$ bzw. $Var(R)$, sodass aus den vorgegebenen Kosten unmittelbar und eindeutig der zugehörige Umfang $E(R)$ bzw. $Var(R)$ der Rückversicherungsabgabe berechnet werden kann. Und wegen der Monotonie der Kostenfunktion resultiert immer dann eine höhere Stop-Loss-Priorität bzw. ein höherer Quoten-Selbstbehalt und daher eine höhere Selbstbehaltssvarianz, wenn man die mit der Rückversicherung verbundenen Kosten reduzieren will.

Satz (Arrow): Sind die Transaktionskosten k eine bei allen Rückversicherungsformen $R = S - Q$ gleiche Funktion g des Erwartungswertes $E(R)$, d.h. gilt $k(R) = g(E(R))$, so ist gemäß dem Nutzenmodell die unlimitierte Stop-Loss-Rückversicherung optimal für den Erstversicherer.

Beweis: Sei R der Rückversicherungsschaden einer beliebigen Rückversicherungsform. Dann gibt es wie beim Varianzmodell eine Stop-Loss-Schadenvariable $R_a = \max(S - a, 0)$ derart, dass $E(R_a) = E(R)$ gilt und daher die Transaktionskosten gleich sind. Daher gilt auch $b(Q) = b(Q_a)$ für die zu den Erstversicherungsschadenvariablen $Q_a = S - R_a = \min(S, a)$ bzw. $Q = S - R$ gehörenden Prämien. Die Nutzenfunktion u des Erstversicherers ist wegen $u'' \leq 0$ konkav, und daher gilt für alle x, x_0

$$u(x) \leq u(x_0) + u'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Lässt sich nun Q als Funktion $Q(S)$ des Gesamtschadens S schreiben, so ist bei einem vorhandenen Sicherheitskapital c

$$\begin{aligned} u(b(Q) + c - Q(s)) - u(b(Q_a) + c - (Q_a(s))) \\ &\leq (Q_a(s) - Q(s)) \cdot u'(b(Q_a) + c - Q_a(s)) \\ &\leq (Q_a(s) - Q(s)) \cdot u'(b(Q_a) + c - a). \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung sieht man wie folgt ein: Im Fall $Q_a(s) < Q(s)$ folgt aus $Q(s) \leq s$ zunächst $Q_a(s) < s$ und daraus $Q_a(s) = \min(s, a) = a$. Daher sind die Argumente von u' gleich, und es gilt in der Abschätzung das Gleichheitszeichen. Im Fall $Q_a(s) \geq Q(s)$ gilt wegen $Q_a(s) \leq a$ für die Argumente von u' die Beziehung $b(Q_a) + c - Q_a(s) \geq b(Q_a) + c - a$, und daraus ergibt sich die Abschätzung, da u' nicht wachsend ist.

Wenden wir auf vorstehende Ungleichung den Erwartungswert-Operator an, so erhalten wir

$$E(u(b(Q) + c - Q)) - E(u(b(Q_a) + c - Q_a)) \leq 0,$$

wegen $E(Q_a) = E(Q)$ und weil $b(Q_a)$ und damit auch $u'(b(Q_a) + c - a)$ ein Skalar ist.

Damit ist der Satz für solche $Q + R = S$ bewiesen, die eine Funktion von S sind.

■

6 Abstufung des Selbstbehalts

Üblicherweise schließt der Erstversicherer nicht einen einzigen Rückversicherungsvertrag für sein gesamtes Portefeuille ab, sondern behandelt jede Branche (Feuer, Allgemein-Haftpflicht, Kraftfahrt-Haftpflicht, Kraftfahrt-Kasko, Unfall, Transport, Einbruch-Diebstahl usw.) getrennt. Angenommen, er möchte in mehreren oder allen getrennt rückversicherten Teilportefeuilles dieselbe Rückversicherungsform anwenden, so stellt sich die Frage, ob der Parameter, der den Umfang der Rückversicherung regelt, überall gleich hoch sein sollte oder nicht. Wenn die Teilportefeuilles voneinander unabhängig sind, können für diese Fragestellung weitgehend explizite Lösungen ermittelt werden, wobei wir uns hier wieder auf das Varianzmodell beschränken.

Satz (De Finetti, Bühlmann): Werden mehrere voneinander unabhängige Teilportefeuilles S_i , $1 \leq i \leq I$, durch getrennte Quoten-Rückversicherung

geschützt, so sind die Selbstbehaltsquoten $c_i = Q_i/S_i$ gemäß dem Varianzmodell proportional zu

$$\frac{z_i \cdot E(S_i)}{\text{Var}(S_i)}$$

zu wählen, wenn die Transaktionskosten $k(R_i) = z_i E(R_i)$ jeweils mit dem Faktor z_i proportional zum Erwartungswert des abgegebenen Schadens R_i sind.

Beweis: Die proportionale Aufteilung des Portefeuilles i ist durch $S_i = Q_i + R_i$ mit $Q_i = c_i S_i$ gegeben. Ist b_i die zu S_i gehörige Prämie (nach Abzug der Originalkosten), so beträgt das erwartete Selbstbehaltsergebnis

$$w_i = b_i - E(S_i) - z_i E(R_i) = b_i - (1 + z_i(1 - c_i))E(S_i).$$

Im Varianzmodell legt der Erstversicherer die Selbstbehaltsquoten c_i so fest, dass bei vorgegebener Gesamtvarianz

$$\sum_{i=1}^I \text{Var}(Q_i) = v_0$$

das erwartete Selbstbehaltsergebnis $w_1 + \dots + w_I$ maximal wird. Diese Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung kann mithilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode gelöst werden. Dazu müssen die optimalen c_i so gewählt werden, dass

$$\frac{\partial}{\partial c_j} \left\{ \sum_{i=1}^I (b_i - (1 + z_i(1 - c_i))E(S_i)) + \beta \left(v_0 - \sum_{i=1}^I \text{Var}(Q_i) \right) \right\} = 0$$

für $j = 1, \dots, I$ gilt mit einem konstanten Multiplikator β , der so zu wählen ist, dass die Nebenbedingung erfüllt ist. Wegen

$$\text{Var}(Q_i) = \text{Var}(c_i S_i) = c_i^2 \text{Var}(S_i)$$

ergibt die Ableitung

$$z_j E(S_j) - 2\beta c_j \text{Var}(S_j) = 0,$$

das heißt

$$c_j = \frac{z_j E(S_j)}{2\beta \text{Var}(S_j)}, \quad 1 \leq j \leq I.$$

Dabei ist β so zu wählen, dass

$$v_0 = \sum_{i=1}^I c_i^2 \text{Var}(S_i)$$

gilt, d.h.

$$\beta^2 = \frac{1}{4 \cdot v_0} \sum_{i=1}^I \frac{(z_i E(S_i))^2}{\text{Var}(S_i)}.$$

■

Der Selbstbehaltsanteil c_i soll also umso höher sein, je teurer die Rückversicherung, gemessen durch z_i , ist und je größer das Portefeuille, gemessen durch $E(S_i)$, ist, und umso kleiner, je größer die Varianz des Portefeuilles ist. Dieses Resultat ist sehr plausibel. Sollten einzelne $c_i \geq 1$ ausfallen, so werden die zugehörigen Teilportefeuilles nicht rückversichert.

Es macht wenig Sinn, den vorstehenden Satz statt auf echte Teilportefeuilles unmittelbar auf einzelne Risiken anzuwenden, da dann die zur Selbstbehaltsfestlegung erforderlichen Parameter $\text{Var}(S_i)$ in der Praxis nicht zuverlässig genug bestimmt werden können. Wenn man aber für ein (Teil-) Portefeuille annehmen kann, dass die Risiken sich nur in ihrer Größe, gemessen durch die Versicherungssumme v_i , unterscheiden, d.h. dass die Schadenvariablen S_i/v_i für alle Risiken i identisch verteilt sind, d.h. insbesondere dieselben Momente

$$E(S_i/v_i) = \mu, \quad \text{Var}(S_i/v_i) = \sigma^2$$

haben, so liefert obiger Satz die Empfehlung, dass die Selbstbehaltsquote c_i von Risiko i

$$\text{proportional zu } \frac{z \cdot v_i \cdot \mu}{v_i^2 \cdot \sigma^2}, \quad \text{d.h. zu } \frac{1}{v_i},$$

d.h. umgekehrt proportional zur Versicherungssumme v_i sein sollte, wenn wir angesichts des überall gleich verteilten Schadensatzes auch von einem konstanten Transaktionskostenansatz $z_i = z$ ausgehen.

Wir wollen noch untersuchen, wie die Prioritäten von unlimitierten Schadenexzedenten-Rückversicherungen zu wählen sind, wenn mehrere voneinander unabhängige Teilportefeuilles auf diese Weise rückversichert werden soll. Dazu sei

$$S_i = \sum_{n=1}^{N_i} X_{in}$$

der Gesamtschaden von Teilportefeuille i gemäß dem Kollektiven Modell, d.h. die Schadenhöhen X_{i1}, X_{i2}, \dots seien unabhängig und identisch wie X_i verteilt und unabhängig von der Schadenzahl N_i . Bei Priorität a_i ist der Selbstbehaltsschaden aus Portefeuille i

$$Q_i = \sum_{n=1}^{N_i} \min(X_{in}, a_i),$$

und der auf den Rückversicherer transferierte Schaden beträgt $R_i = S_i - Q_i$. Dann gilt folgender Satz:

Satz (Bühlmann): Werden mehrere voneinander unabhängige Teilportefeuilles S_i , $1 \leq i \leq I$, mit Einzelschadenhöhe X_i und davon unabhängiger, poissonverteilter Schadenzahl durch getrennte, unlimitierte Schadenexzedenten-Rückversicherungen geschützt, so sollten deren Prioritäten a_i im Varianzmodell die implizite Gleichung

$$a_i = (k_1/2 + k_2 \cdot E(X_i - a_i | X_i > a_i)) / \beta$$

erfüllen, wenn die Transaktionskosten die Form

$$k(R_i) = z_i + k_1 E(R_i) + k_2 \text{Var}(R_i)$$

haben, und der Faktor β so gewählt wird, dass das vorgegebene Varianzniveau eingehalten wird.

7 Suboptimale und pareto-optimale Risikoteilung

Es gibt Risikoteilungsformen, die auf jeden Fall gemieden werden sollten, weil eine für beide Beteiligten bessere Alternative existiert. Ein Beispiel ist die *Integral-Franchise*, die hier im Rückversicherungskontext auf Jahresbasis formuliert wird: Ausgehend vom Jahresgesamtschaden S und einer vereinbarten Schadengrenze \underline{a} trägt der Erstversicherer

$$Q = \begin{cases} S & \text{falls } S \leq \underline{a}, \\ 0 & \text{falls } S > \underline{a} \end{cases}$$

und der Rückversicherer trägt $R = S - Q$, d.h. er übernimmt den vollen Schaden, wenn er höher als die Grenze \underline{a} ist.

Satz: Zu jeder Integral-Franchise $Q + R = S$ mit Schadengrenze \underline{a} gibt es einen unlimitierten Stop-Loss $Q_a + R_a = S$, $Q_a = \min(S, a)$, mit Priorität $a < \underline{a}$ und gleichen Erwartungswerten $E(Q_a) = E(Q)$, $E(R_a) = E(R)$, aber niedrigeren Varianzen $Var(Q_a) < Var(Q)$, $Var(R_a) < Var(R)$.

Beweis: $E(Q_a)$ ist eine stetige, streng monoton wachsende Funktion von a mit $0 \leq E(Q_a) \leq E(S)$. Daher gibt es zur gegebenen Integral-Franchise $Q + R = S$ mit Schadengrenze \underline{a} einen Stop-Loss derart, dass $E(Q_a) = E(Q)$ und damit auch $E(R_a) = E(R)$ gilt. Wir müssen also nur die Aussage über die Varianzen beweisen. An der Darstellung

$$\begin{aligned} \int_0^{\underline{a}} s \, dG(s) &= E(Q) = E(Q_a) \\ &= \int_0^a s \, dG(s) + a \cdot (1 - G(a)) \end{aligned}$$

(mit der Verteilungsfunktion G von S) sieht man sofort, dass $a < \underline{a}$ und

$$\int_a^{\underline{a}} s \, dG(s) = a(1 - G(a))$$

gelten muss. Daher wird

$$\begin{aligned} E(Q^2) &= \int_0^{\underline{a}} s^2 \, dG(s) = \int_0^a s^2 \, dG(s) + \int_a^{\underline{a}} s^2 \, dG(s) \\ &> \int_0^a s^2 \, dG(s) + a \cdot \int_a^{\underline{a}} s \, dG(s) \\ &= \int_0^a s^2 \, dG(s) + a^2(1 - G(a)) = E(Q_a^2). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \text{Var}(Q_a) &= E(Q_a^2) - (E(Q_a))^2 \\ &< E(Q^2) - (E(Q))^2 = \text{Var}(Q), \end{aligned}$$

was auch schon aus dem Satz von Borch, Kahn und Pesonen aus Abschnitt 5 folgte.

Wir zeigen nun noch

$$\int_a^{\infty} (s - a)^2 \, dG(s) = E(R_a^2) < E(R^2) = \int_{\underline{a}}^{\infty} s^2 \, dG(s).$$

Dies folgt unmittelbar aus

$$\begin{aligned}
 \int_a^{\underline{a}} (s - a)^2 dG(s) &< (\underline{a} - a) \cdot \int_a^{\underline{a}} (s - a) dG(s) \\
 &= (\underline{a} - a)a(1 - G(a) - (G(\underline{a}) - G(a))) \\
 &< (2\underline{a}a - a^2) \cdot (1 - G(\underline{a})) \\
 &< \int_a^{\infty} (s^2 - (s - a)^2) dG(s).
 \end{aligned}$$

Damit ist auch

$$\begin{aligned}
 Var(R_a) &= E(R_a^2) - (E(R_a))^2 \\
 &< E(R^2) - (E(R))^2 = Var(R)
 \end{aligned}$$

bewiesen. ■

Der vorstehende Satz besagt, dass für Erst- und Rückversicherer, die nach dem Varianzmodell entscheiden, die Integral-Franchise keine empfehlenswerte Risikoteilung darstellt, da es eine für beide Seiten bessere Form der Risikoteilung gibt, nämlich den Stop-Loss (bzw. die Abzugs-Franchise). Genau genommen gilt dies nur unter der Voraussetzung, dass die Transaktionskosten nur von Erwartungswert und Varianz des Rückversicherungsschadens abhängen - einer im Varianzmodell sehr natürlichen Voraussetzung. Werden die Transaktionskosten z.B. gemäß $k(R) = k_0 + k_1 E(R) + k_2 Var(R)$ berechnet, so ergibt der gemäß obigem Satz definierte Stop-Loss sowohl eine niedrigere Selbstbehaltsvarianz wie auch niedrigere Transaktionskosten (falls $k_2 > 0$) als die Integral-Franchise.

Risikoteilungsformen, zu denen es keine Alternative gibt, bei der sich wenigstens eine Seite besser stellt, ohne dass die andere sich verschlechtert, heißen *pareto-optimal*. Die Integral-Franchise ist im Varianzmodell also nicht pareto-optimal. Das gilt übrigens auch im Nutzenmodell, wenn die Transakti-

onskosten nur von der Schadenerwartung des Rückversicherers abhängen. Bei pareto-optimalen Rückversicherungsformen geht jede Verbesserung zu Gunsten des Erstversicherers zu Lasten des Rückversicherers und umgekehrt.

Wir haben bisher hauptsächlich Rückversicherungsformen betrachtet, bei denen der Selbstbehaltsschaden Q des Erstversicherers und der auf den Rückversicherer transferierte Schadenteil $R = S - Q$ Funktionen des Gesamtschadens S sind. Dies ist bei Quote $Q = cS$, Stop-Loss $Q = \min(S, a)$ und Integral-Franchise (wenn sie, wie hier, auf Jahresbasis definiert ist) der Fall. Dagegen sind z.B. der Summenexzedent und der Schadenexzedent keine Funktionen des Gesamtschadens S ; vielmehr hängt hier die Aufteilung von S davon ab, in welcher Weise sich S aus kleinen oder großen Einzelschäden zusammensetzt (beim Schadenexzedenten) bzw. ob die großen Einzelschäden eher bei Risiken mit hohen oder weniger hohen Versicherungssummen anfallen (beim Summenexzedenten).

Satz: Zu jeder Rückversicherungsform $\underline{Q} + \underline{R} = S$, bei der \underline{Q} und \underline{R} keine Funktionen des Jahresgesamtschadens S sind, sondern von den Einzelschäden abhängen, gibt es eine Rückversicherungsform $Q + R = S$, bei der Q und R Funktionen von S sind, und derart, dass $E(Q) = E(\underline{Q})$, $E(R) = E(\underline{R})$ und $Var(Q) < Var(\underline{Q})$, $Var(R) < Var(\underline{R})$ gilt.

Beweis: Wir zeigen, dass $Q = E(\underline{Q}|S)$, $R = S - Q = E(S|S) - E(\underline{Q}|S) = E(\underline{R}|S)$ die geforderten Bedingungen erfüllen. Q und R sind Funktionen von S und es gilt $E(Q) = E(E(\underline{Q}|S)) = E(\underline{Q})$ und $E(R) = E(E(\underline{R}|S)) = E(\underline{R})$. Weiter ist

$$\begin{aligned} Var(Q) &= Var(E(\underline{Q}|S)) \\ &< Var(E(\underline{Q}|S)) + E(Var(\underline{Q}|S)) \\ &= Var(\underline{Q}). \end{aligned}$$

Genauso ist

$$\begin{aligned} \text{Var}(R) &= \text{Var}(E(\underline{R}|S)) \\ &< \text{Var}(E(\underline{R}|S)) + E(\text{Var}(\underline{R}|S)) \\ &= \text{Var}(\underline{R}). \end{aligned}$$

■

Korollar: Eine Rückversicherungsform, die sich nicht als Funktion des Jahresgesamtschadens darstellen lässt, ist im Varianzmodell nicht pareto-optimal.

Der vorstehende Beweis gibt auch konkret an, wie wir prinzipiell zu Summen- oder Schadenexzedenten eine für beide Seiten *bessere Rückversicherungsform* konstruieren können. Ist z.B. ein bestimmtes Portefeuille und ein konkreter Summenexzedent gegeben, so kann sich ein und derselbe Jahresgesamtschaden $S = s$ auf viele unterschiedliche Weisen aus Einzelschäden zusammensetzen. Für alle möglichen Weisen mit Gesamtschaden s muss dann festgestellt werden, welcher Selbstbehalt Q sich gemäß Summenexzedent jeweils ergibt. Der Erwartungswert $E(Q|S = s)$ dieser zu $S = s$ gehörenden Selbstbehaltsschäden stellt dann den unter der besseren Rückversicherungsform tatsächlich vom Erstversicherer zu tragenden Selbstbehaltsgesamtschaden dar, falls der Jahresgesamtschaden $S = s$ beträgt.

Es ist klar, dass die zur Berechnung von $E(Q|S = s)$ erforderlichen Schadenzahl- und Schadenhöhenwahrscheinlichkeiten pro Risiko in den Zweigen der Schadenversicherung allenfalls approximativ und unter zusätzlichen Modellannahmen ermittelt werden können. Nur in der Lebens- oder Unfalltod-Versicherung erscheint es möglich, dass sich beide Seiten auf die erforderlichen Rechnungsgrundlagen einigen. Daher können Summen- und Schadenexzedenten-Rückversicherung weiterhin ihren Platz in der Versicherungspraxis beanspruchen, da sie zwar suboptimal sind, doch die theoretisch bessere Rückversicherungsform in der Regel nicht explizit ausgerechnet werden kann. Ebenso sind die im vorigen Abschnitt behandelten Abstufungen des Selbsthalts nicht pareto-optimal, d.h. können theoretisch noch weiter verbessert werden durch eine Rückversicherungsform, die nur vom Gesamtschaden aller

betrachteten Teilportefeuilles abhängt.

Wir haben also gesehen, dass eine pareto-optimale Rückversicherungsform notwendigerweise als Funktion des Jahresgesamtschadens darstellbar sein muss. Doch dies allein ist nicht hinreichend, wie das Beispiel der Integral-Franchise (auf Jahresbasis) zeigt. Der folgende Satz charakterisiert die pareto-optimalen Rückversicherungsformen.

Satz (Pesonen): Eine Rückversicherungsform $Q + R = S$ ist im Varianz- oder Nutzenmodell genau dann pareto-optimal, wenn Selbstbehaltsschaden Q und Rückversicherungsschaden R monoton nicht fallende Funktionen des Jahresgesamtschadens S sind.

Aus dem Satz folgt unmittelbar, dass Quote und Stop-Loss pareto-optimal sind, da Q und R jeweils monoton nicht fallende Funktionen von S sind. Dagegen ist bei der Integral-Franchise (auf Jahresbasis) der Selbstbehaltsschaden Q nicht monoton nichtfallend, was erneut zeigt, dass die Integral-Franchise nicht pareto-optimal ist.

8 Fazit

Wir haben gesehen, dass wegen der Vagheiten bezüglich der Schadenverteilung und damit bezüglich der tatsächlichen Transaktionskosten, die für den Erstversicherer optimale Rückversicherungsform im konkreten Fall normalerweise nicht ermittelt werden kann. In der Praxis orientiert man sich daher oft an der jeweils dominierenden Komponente des versicherungstechnischen Risikos, d.h. an Zufalls- bzw. Änderungsrisiko. Sie spielen nämlich in den einzelnen Versicherungssparten in der Regel eine unterschiedliche Rolle. So dominiert z.B. in der Feuerversicherung von Industriebetrieben mit ihren stark unterschiedlichen Versicherungssummen normalerweise das Zufallsrisiko, d.h. der Verlauf dieser Sparte wird entscheidend durch wenige Großschäden geprägt. In der Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung dagegen spielen einzelne Großschäden keine dominierende Rolle. Der Verlauf wird hier stark vom Änderungsrisiko („Jahresqualität“), sowie von der sich über die

Lohnkosten auswirkenden Inflationsrate beeinflusst.

Gegen das Zufallsrisiko aus einzelnen Großschäden schützen am Besten der Summenexzedent und der Schadenexzedent. Bei Kumulierung vieler Schäden aus einem Ereignis entlastet natürlich der Kumulschadenexzedent am Meisten. Dem Änderungsrisiko, das sich auf alle Schäden auswirkt, kann offensichtlich durch Quote oder Stop-Loss am Besten begegnet werden. In den Sparten, wo beide Komponenten des versicherungstechnischen Risikos eine Rolle spielen, werden häufig mehrere Rückversicherungsformen miteinander kombiniert („Rückversicherungsprogramm“).

Wir haben weiter gesehen, dass die theoretischen Modelle – unter idealisierten und wenig realistischen Annahmen bezüglich der Transaktionskosten – die optimale Rückversicherungsform und den optimalen Selbstbehalt zugleich liefern. Wenn man – wie in der Realität meist der Fall – die konkrete Situation nicht analytisch durchrechnen kann, ergeben sich für eine numerische Berechnung zu viele Möglichkeiten, selbst wenn man sich auf die fünf Rückversicherungs-Grundformen aus Abschnitt 2 und ihre Kombinationsmöglichkeiten beschränkt. Bei vorgegebener Rückversicherungsform hingegen hält sich der Rechenaufwand zur Bestimmung des Selbsthalts in Grenzen, auch wenn man sich dem theoretischen Optimum meist nur durch Probieren und Interpolieren nähern kann. Problematisch und von entscheidendem Einfluss bleibt in jedem Fall die Quantifizierung wichtiger Einflussgrößen, insbesondere der Schadenverteilung (speziell im Großschadenbereich) und der Transaktionskosten, zumal beide sich im Laufe der Zeit erheblich ändern können.

Literatur

[MACK] THOMAS MACK: **Schadenversicherungsmathematik**, 2. Auflage, Verlag Versicherungswirtschaft Karlsruhe 2002, Kapitel 4.4

[WIKIPEDIA] <http://de.wikipedia.org/wiki/Rückversicherung>, Zugriffsdatum: 20.01.2009