

Gewinnbeteiligungssysteme bei Versicherungsunternehmen

Susanne Schallhart

February 26, 2009

<i>CONTENTS</i>	2
-----------------	---

Contents

1 Die Gewinnermittlung	3
2 Überschussermittlung bei Lebensversicherungsunternehmen	3
3 Gewinnzerlegung	5
3.1 Zerlegung des Gewinns nach Teilbeständen	5
3.2 Zerlegung des Gewinns nach Ergebnisquellen	5
4 Die Kontributionsformel	7
5 Zinsformel von Hardy	10
6 Überschussverteilung	10
7 Überschussverwendung	13
8 Die Finanzierbarkeit	14
9 Ein Finanzierbarkeitsnachweis	17
9.1 Individuelle Betrachtung	17
9.2 Globale Betrachtung	21
10 Variation der Rechnungsgrundlagen	22
11 Rentabilität eines Lebensversicherungsvertrages	22
12 Literaturverzeichnis	24

1 Die Gewinnermittlung

Die Ermittlung des genauen Gewinns ist für jeden Unternehmer von größter Bedeutung. Denn nur, wenn ein Unternehmer weiß wie viel er erwirtschaftet hat, kann er neue Berechnungen für weitere Investitionen anstellen. Außerdem wird der Unternehmen von Rechts wegen zur Berechnung seines Gewinns gezwungen. Der Gewinn berechnet sich aus der Summe der Einnahmen minus der Summe der Ausgaben. Ist diese Differenz positiv, so hat man einen Gewinn erzielt. Ist die Differenz jedoch negativ, so spricht man von einem Verlust.

Jeder Unternehmer erstellt einen Jahresabschluss. Dieser besteht aus der Bilanz und der Gewinn- und Verlustrechnung. Bei Versicherungsunternehmen wird der Jahresabschluss meist um einen Lagebericht ergänzt. Die Gewinn- und Verlustrechnung ist eine Perioden-Erfolgsrechnung wohingegen die Bilanz nur eine Momentaufnahme darstellt.

2 Überschussermittlung bei Lebensversicherungsunternehmen

Die Gewinn- und Verlustrechnung muss so wie die Bilanz gewissen Anforderungen genügen. So ist auch das Schema sowie der Mindestinhalt der Gewinn- und Verlustrechnung im VAG (Versicherungsaufsichtsgesetz) geregelt.

Lebensversicherungsunternehmen steht der Gewinn, welcher sich aus der Differenz der Einnahmen und Ausgaben berechnet, nicht wie anderen Unternehmen zur freien Verfügung. Der größte Teil des Gewinns bei Lebensversicherungsunternehmen entsteht aus der vorsichtigen Kalkulation. Diese vorsichtige Kalkulation ist keine Willkür des Versicherungsunternehmens sondern beruht auf aufsichtsrechtlichen Bestimmungen. Es müssen z.B. Rechnungsgrundlagen erster Ordnung verwendet werden. Unter Rechnungsgrundlagen erster Ordnung versteht man Grundlagen, die sehr vorsichtig gewählt worden also eher unrealistisch sind. Zum Beispiel verwendet man einen zu niedrigen Zins oder eine überhöhte Sterblichkeit. Unter den Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung versteht man dann solche, die realistische Zins-, Sterblichkeits- und Kostenannahmen beinhalten.

Laut der Gewinnbeteiligungsverordnung (BGBl II 389/2006) müssen mindestens 85% der Bemessungsgrundlage für die Aufwendungen für die erfolgsabhängige Prämienrückerstattung bzw. Gewinnbeteiligung der Versicherungsnehmer verwendet werden. Wobei die Bemessungsgrundlage zu dem Bilanzstichtag folgendermaßen zu ermitteln ist:

2 ÜBERSCHUSSERMITTLUNG BEI LEBENSVERSICHERUNGSUNTERNEHMEN⁴

+	Abgegrenzte Prämien
+	Erträge aus Kapitalanlagen und Zinsenerträge
-	Aufwendungen für Kapitalanlagen und Zinsenaufwendungen
+	sonstige versicherungstechnische Erträge
-	Aufwendungen für Versicherungsfälle
-	Erhöhung von versicherungstechnischen Rückstellungen
+	Verminderung von versicherungstechnischen Rückstellungen
-	Aufwendungen für den Versicherungsbetrieb
-	Sonstige versicherungstechnischen Aufwendungen
+	Sonstige nichtversicherungstechnische Erträge
-	Sonstige nichtversicherungstechnische Aufwendungen
-	Steuern vom Einkommen und vom Ertrag
+	Auflösung der Risikorücklage gemäß § 73a VAG
-	Zuweisung an die Risikorücklage gemäß § 73a VAG
=	Bemessungsgrundlage im Sinne des § 18 Abs. 4 VAG

Der Gewinn wird in zwei Teile zerlegt. Einerseits steht ein Teil dem Unternehmer zur Verfügung. Dieser Teil muss in der Gewinn- und Verlustrechnung ausgewiesen werden. Der größere Teil steht jedoch den Versicherungsnehmern zu und wird in die Position Rückstellungen für die erfolgsabhängige Prämienrückerstattung bzw. Gewinnbeteiligung der Versicherungsnehmer gestellt.

Die Position Rückstellungen für die erfolgsabhängige Prämienrückerstattung bzw. Gewinnbeteiligung der Versicherungsnehmer hat zwei Funktionen: Sollte in einem Jahr ein Verlust entstehen, so kann dieser einerseits mit dieser Rückstellung beglichen werden.

Wohingegen die eigentliche Hauptverwendung der Rückstellungen für die erfolgsabhängige Prämienrückerstattung bzw. Gewinnbeteiligung der Versicherungsnehmer darin besteht, dem Versicherungsnehmer seinen angemessenen Betrag gutzuschreiben. Der Versicherungsnehmer kann erst auf seinen Betrag zugreifen, wenn ihn das Versicherungsunternehmen auf das Konto des Versicherungsnehmers überwiesen hat. Bis dahin gehört der Betrag dem Versicherungsunternehmen.

Dieser Betrag stellt eigentlich eine Schwankungsreserve dar. Jedoch benötigen Lebensversicherungsunternehmen diese Reserve so gut wie nie. Deshalb ist es nicht sinnvoll dem Versicherungsnehmer erst den Betrag wegzunehmen und möglicherweise erst ein bis zwei Jahre später wieder zurückzuzahlen. Um den Versicherungsnehmer sofort in den Genuss einer Zahlung zu stellen, wird nur ein kleinerer Teil in die Rückstellungen für die erfolgsabhängige Prämienrückerstattung bzw. Gewinnbeteiligung der Versicherungsnehmer gegeben, der andere Teil wird dem Versicherungsnehmer sofort gutgeschrieben. Dieses Verfahren heißt Direktgutschrift.

3 Gewinnzerlegung

Die vorhin schon erwähnte Gewinn- und Verlustrechnung bildet gemeinsam mit der Bilanz den Jahresabschluss. Dieser muss laut Versicherungsaufsichtsrecht jährlich veröffentlicht werden. Die meisten Versicherungen veröffentlichen ihren Jahresabschluss in der Wiener Zeitung. Eine weitere Aufschlüsselung des Gewinns ist nicht nur von der FMA (Finanzmarktaufsicht) verordnet, sondern liegt auch im Interesse des Unternehmens. Diese weitere Aufschlüsselung des Gewinns wird allerdings nicht veröffentlicht.

Der Gewinn des Unternehmens wird in zwei Hauptbereiche zerlegt:

1. Zerlegung des Gewinns nach Teilbeständen
2. Zerlegung des Gewinns nach Ergebnisquellen

3.1 Zerlegung des Gewinns nach Teilbeständen

Der gesamte Bestand an Versicherungsverträgen wird unterteilt in Klassen, genannt Abrechnungsverbände. Wie diese Unterteilung genau aussieht, kann jedes Unternehmen bis auf einige aufsichtsbehördliche Einschränkungen individuell bestimmen.

Ein Beispiel für die Einteilung in Versicherungsbestände kann z.B. folgendermaßen aussehen:

- Abrechnungsverband Renten: Bei Renten werden andere Sterbetafeln und somit andere Tarife als bei kapitalbildenden Versicherungen verwendet.
- Abrechnungsverband Fondsgebundene Lebensversicherung
- Abrechnungsverband Vermögensbildende Versicherungen
- Abrechnungsverband Sondertarife

Für jeden einzelnen Abrechnungsverband wird nun separat eine Gewinn- und Verlustrechnung erstellt. So kann das Versicherungsunternehmen feststellen wie jeder einzelne Abrechnungsverband gewirtschaftet hat.

3.2 Zerlegung des Gewinns nach Ergebnisquellen

Folgende Gewinn- und Verlustquellen tragen zum Gesamtgewinn des Versicherungsunternehmens bei:

- Risikoergebnis (oder auch Sterblichkeitsergebnis): Das Ableben oder das Erleben eines bestimmten Alters einer Person ist zufällig. Somit ist auch die damit verbundene Zahlung zufällig. Dadurch können bei Abweichen dieser zufälligen Ereignisse vom Erwartungswert Gewinne oder Verluste entstehen. Zumeist entstehen beim Todesfallrisiko Gewinne. Beim Erlebensfallrisiko können manchmal Verluste entstehen, die jedoch durch die hohen Todesfallgewinne kompensiert werden können.
- Kapitalergebnis: Das Kapitalergebnis wird weiter unterteilt in:
 - Zinsergebnis: Zumeist wird das Verhalten des Zinssatzes sehr vorsichtig kalkuliert. Deshalb entstehen Differenzen zwischen dem tatsächlich erwirtschafteten Zins und dem Rechnungszins. Ist diese Differenz positiv, so spricht man von einem Zinsgewinn, ansonsten von einem Zinsverlust.
 - Ergebnis aus den Kapitalanlagen: Die Kapitalanlagen werden jährlich zum Bilanzstichtag neu bewertet. Durch diese Neubewertung entstehen Buchgewinne oder Verluste. Diese Gewinne und Verluste werden zusammengefasst zu dem Kapitalgewinn oder -verlust.
- Stornoergebnis: Dem Versicherungsunternehmen entstehen Gewinne und Verluste auch durch Stornierungen von Versicherungsverträgen. Hierbei unterscheidet man zwischen Früh- und Spätstorno. Wird ein Versicherungsvertrag kurz nach dem Abschluss storniert - kommt es also zu einem Frühstorno - entstehen dem Versicherungsunternehmen Verluste. Diese Verluste resultieren aus den hohen Abschlusskosten, die normalerweise auf die gesamte Versicherungsdauer aufgeteilt werden. Wird der Vertrag allerdings erst kurz vor dem Vertragsende storniert - es kommt zu einem Spätstorno - so können beachtliche Gewinne durch Stornozuschläge erzielt werden. Das Gesamtergebnis führt meistens zu Verlusten, da die Anzahl der Frühstornos höher ist als die der Spätstornos.
- Kostenergebnis: auch hier existiert eine weitere Unterteilung:
 - Abschlusskosten: Die tatsächlichen Abschlusskosten abzüglich den erwarteten Abschlusskosten liefern das Abschlusskostenergebnis. Besonders bei expandierenden Unternehmen ist dies eine Verlustquelle.
 - Laufende Verwaltungskosten: Auch hier wird die Differenz zwischen den erwarteten und den tatsächlichen Kosten gebildet. Im Laufe der Zeit konnten durch Optimierung und IT in diesem Bereich Gewinne erzielt werden.

- Rückversicherungsergebnis: Zur besseren Risikoverwaltung wird ein Teil der Verträge an Rückversicherungen weitergegeben. Aus dieser Verrechnung entstehen Gewinne und Verluste. Zumeist handelt es sich um kleinere Verluste.
- Sonstiges Ergebnis: z.B. Abschreibungen, Steuern,...

4 Die Kontributionsformel

Für die Berechnung der Kontributionsformel benötigt man die Zillmerprämie. Diese entsteht durch das Verfahren der Zillmerung. Bei diesem Verfahren werden die Abschlusskosten dem Deckungskapital angelastet. D.h. es entsteht ein negatives Deckungskapital zu Vertragsbeginn. Diese Schuld des Versicherungsnehmers wird durch die Zahlung der Zillmerprämie, also die Prämie vermehrt um einen Abschlusskostenzuschlag, getilgt.

Kennt man die Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung, so ist es möglich, die Gewinne und Verluste einzelner Polizzen zu berechnen.

q'_x	bezeichne die Sterbewahrscheinlichkeit eines x-Jährigen im Bestand
i'	bezeichne den erwirtschafteten Zins
K_m^x	bezeichne die tatsächlich entstandenen Kosten für eine Polizza eines Versicherungsnehmers mit Beitrittsalter x im m -ten Versicherungsjahr.
E_m^x	bezeichnet die Erlebensfalleistung, die gezahlt werden muss, wenn die Person das m -te Jahr überlebt
T_m^x	bezeichnet die Todesfalleistung, die am Ende den m -ten Jahres gezahlt werden muss, wenn die Person im m -ten Jahr stirbt
B_m^x	bezeichnet die verallgemeinerte Prämie im m -ten Versicherungsjahr
P_m^z	bezeichnet die gezillmerte Prämie (=Zillmerprämie) im m -ten Versicherungsjahr
${}_mV_x$	bezeichnet das Nettodeckungskapital im m -ten Jahr

Hierbei bezeichnen die mit ' gekennzeichneten Bezeichnungen die tatsächlichen Werte. Die restlichen Bezeichnungen werden über die Rechnungsgrundlagen erster Ordnung berechnet.

Die Einnahmen E'_m aus dem m -ten $m = 1, 2, \dots$ Versicherungsjahr zu Jahresende sind:

$$(1) \quad E'_m = ({}_{m-1}V_x + B_m^x)(1 + i')$$

Die Ausgaben erhält man aus:

$$(2) \quad A'_m = (1 - q'_{x+m})E_m^x + q'_{x+m}T_m^x + K_m^x(1 + i') + (1 - q'_{x+m})_m V_x$$

Der Gewinn g_m^x ist dann die Differenz der Ausgaben und Einnahmen:

$$(3) \quad g_m^x = E'_m - A'_m$$

Sind die Rechnungsgrundlagen erster Ordnung gleich den Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung so ist der Gewinn gleich Null.

$$(4) \quad E_m = ({}_{m-1}V_x + B_m^x)(1 + i)$$

$$(5) \quad A_m = (1 - q_{x+m})E_m^x + q_{x+m}T_m^x + (B_m^x - P_m^{x,z})(1 + i) + (1 - q_{x+m})_m V_x$$

$$(6) \quad \begin{aligned} 0 &= E_m - A_m = \\ &= ({}_{m-1}V_x + B_m^x)(1 + i) - (1 - q_{x+m})E_m^x - q_{x+m}T_m^x - \\ &\quad - (B_m^x - P_m^{x,z})(1 + i) - (1 - q_{x+m})_m V_x \\ &= B_m^x(1 + i) - B_m^x(1 + i) + {}_{m-1}V_x(1 + i) + P_m^{x,z} - \\ &\quad - (1 - q_{x+m})E_m^x - q_{x+m}T_m^x - (1 - q_{x+m})_m V_x \\ &= {}_{m-1}V_x(1 + i) + P_m^{x,z} - (1 - q_{x+m})E_m^x - q_{x+m}T_m^x - \\ &\quad - (1 - q_{x+m})_m V_x = \\ &= 0 \end{aligned}$$

da gilt:

$${}_{m-1}V_x(1 + i) + P_m^{x,z} = (1 - q_{x+m})E_m^x + q_{x+m}T_m^x + (1 - q_{x+m})_m V_x$$

Nun kommt man zur Kontributionsformel indem man Gleichung (6) von Gleichung (3) subtrahiert:

$$\begin{aligned}
(7) \quad g_m^x &= E'_m - E_m + A_m - A'_m \\
&= ({}_{m-1}V_x + B_m^x)[(1+i') - (1+i)] + \\
&\quad + [(1 - q_{x+m})E_m^x + q_{x+m}T_m^x + (B_m^x - P_m^{x,z})(1+i) + \\
&\quad + (1 - q_{x+m})_m V_x] - [(1 - q'_{x+m})E_m^x + q'_{x+m}T_m^x + \\
&\quad + K_m^x(1+i') + (1 - q'_{x+m})_m V_x] \\
&= ({}_{m-1}V_x + B_m^x)(i' - i) + E_m^x(q'_{x+m} - q_{x+m}) + \\
&\quad + T_m^x(q_{x+m} - q'_{x+m}) + (B_m^x - P_m^{x,z})(1+i) - K_m^x(1+i') + \\
&\quad + (q'_{x+m} - q_{x+m})_m V_x \\
&= ({}_{m-1}V_x + B_m^x - K_m^x)(i' - i) + (q_{x+m} - q'_{x+m}) \cdot \\
&\quad \cdot (T_m^x - E_m^x - {}_m V_x) + (B_m^x - P_m^{x,z} - K_m^x)(1+i)
\end{aligned}$$

Der Gewinn kann nun in einen Zinsgewinn $g_m^{x,Z}$, einen Risikogewinn $g_m^{x,R}$ und einen Kostengewinn $g_m^{x,K}$ zerlegt werden:

$$(8) \quad g_m^{x,Z} = ({}_{m-1}V_x + B_m^x - K_m^x)(i' - i)$$

$$(9) \quad g_m^{x,R} = (q_{x+m} - q'_{x+m})(T_m^x - E_m^x - {}_m V_x)$$

$$(10) \quad g_m^{x,K} = (B_m^x - P_m^{x,z} - K_m^x)(1+i)$$

Der hier berechnete Gewinn ist der zu erwartende Gewinn pro Versicherungsnehmer zu Jahresbeginn. Dadurch kann dem Versicherungsnehmer gleich zu Beginn des Jahres der erwartete Gewinn ausbezahlt werden. Jedoch ist meist der erwirtschaftete Gewinn pro Versicherungsnehmer am Jahresende von Interesse. Um dies in den obigen Gleichungen ausdrücken zu können, muss man die linken Seiten der Gleichungen (3) und (7) bis (10) jeweils mit $(1 - q'_{x+m})$ multiplizieren. Dadurch werden die Gewinne pro Versicherungsnehmer größer.

Die Abschlusskosten K_1^x sind im Vergleich zu den folgenden Kosten sehr hoch. Um diese hohen Kosten aufzuteilen zahlt der Versicherungsnehmer die Zillmerprämie, die den größten Teil der hohen Abschlusskosten auf die Vertragslaufzeit verteilt. Der andere Teil der Abschlusskosten wird vom gesamten Versicherungsbestand getragen, da dieser seinen Nutzen aus weiteren Neuabschlüssen zieht. So findet durch einen Neuabschluss eine weitere Diversifikation statt, die - unter der Berücksichtigung der Selektion - zu einer verbesserten Sterbewahrscheinlichkeit führt. Deshalb werden in der Kontributionsformel die Abschlusskosten K_1^x nicht in voller Höhe einberechnet.

5 Zinsformel von Hardy

Um den tatsächlich erwirtschafteten Zins i' zu berechnen verwendet man die Zinsformel von Hardy.

K_0	bezeichne das Kapital am Jahresanfang
K_1	bezeichne das Kapital am Jahresende
I	bezeichne den Zinsertrag
ΔK	bezeichne $K_1 - K_0$
$\Delta K * \delta$	bezeichne den Kapitalzuwachs nach t Zeiteinheiten im Intervall $[t, t + \delta]$ ($0 \leq t \leq 1$); dieser Zuwachs wird verzinst mit $(1 - t) \cdot j$
j	bezeichne den Jahreszinssatz

Also gilt:

$$(11) \quad I := K_0 * j + \int_0^1 \Delta K \cdot (1 - t) \cdot j dt$$

Somit gilt:

$$(12) \quad I = K_0 j + \frac{1}{2} \Delta K j = \frac{j}{2} (2K_0 + K_1 - K_0 - I)$$

Daraus folgt:

$$(13) \quad j = \frac{2I}{K_0 + K_1 - I}$$

Diese Formel heißt Zinsformel von Hardy. Somit lässt sich der erwirtschaftete Zins mit Hilfe des Kapitals zu Jahresbeginn, des Kapitals zu Jahresende und dem Zinsertrag berechnen.

6 Überschussverteilung

Jeder Versicherungsnehmer muss selbst für seine Kosten, seine erwarteten Schäden bzw. seine erwartete Todes- bzw. Erbensfalleistung aufkommen. Deshalb scheint es nur gerecht, dass der Versicherungsnehmer auch die durch seine Versicherung zu erwartenden Gewinne bekommt.

Wird der entstandene Überschuss dem Versicherungsnehmer jeweils zu Jahresende oder wird der erwartete Überschuss jeweils zu Jahresbeginn ausbezahlt, so bezeichnet man dies mit der streng natürlichen Überschussbeteiligung.

Diese Form der Überschussbeteiligung ist extrem selten bzw. kommt in der Praxis gar nicht vor. Dies beruht vor allem auf aufsichtrechtliche Bestimmungen der FMA, andererseits entstehen durch den Wettbewerb bei Lebensversicherungsunternehmen, der vor allem über die Gewinnbeteiligung stattfindet, wesentliche Unterschiede.

Die zwei wesentlichen Gründe, dass Versicherungsunternehmen nicht die streng natürliche Überschussbeteiligung anwenden sind:

1. Einerseits kann das streng natürliche System nicht angewendet werden, da der größte Teil der Gewinne in den Posten Rückstellungen für die erfolgsabhängige Prämienrückerstattung bzw. Gewinnbeteiligung der Versicherungsnehmer gestellt wird. Dies führt sehr oft auf wesentlich verspätete Auszahlungen an den Versicherungsnehmer. Um diese Zeit zu verkürzen und dem Versicherungsnehmer sofort einen Teil der ihm zustehenden Überschüsse zu gewähren wurde die Direktgutschrift eingeführt. Dabei handelt es sich um eine Gutschrift in der Höhe von 2% des Zinsertrages. Der restliche Zinsertrag sowie die anderen Gewinne werden wiederum in den Posten Rückstellungen für die erfolgsabhängige Prämienrückerstattung bzw. Gewinnbeteiligung der Versicherungsnehmer gestellt.
2. Je länger die Versicherungsdauer desto größer ist die Bedeutung der Zinsgewinne; wohingegen die Bedeutung der Kosten- sowie der Risikogewinne sinkt.

Am Beispiel der gemischten Versicherung wird dies deutlich:

- Kostengewinne bleiben bis auf Inflationseffekte konstant.
- Die Risikogewinne fallen, da das Risikokapital kleiner wird und der Selektionseffekt abnimmt.
- Die Zinsgewinne steigen in der vereinfachenden Annahme gleichbleibender Zinssätze aufgrund der Zinseszinsen.

Gäbe es gleichbleibende Zinssätze, so könnten jedes Jahr $(i' - i) * 100\%$ Zinsen an den Versicherungsnehmer bezahlt werden. Dies ist jedoch nicht möglich, da Zinsen konjunkturabhängig sind.

Versicherungsunternehmen sind daran interessiert über längere Zeiträume konstante Zinsen verrechnen zu können. Verwendet ein Versicherungsunternehmen konstante Zinssätze zur Bestimmung der Zinsgewinne, so zahlt es in manchen Jahren zu viel und in manchen Jahren zu wenig aus. Je nachdem ob der tatsächlich Zinskurs unter bzw. über dem verwendeten liegt. Durch die vorsichtige Kalkulation der Versicherungsunternehmen ist es ihnen möglich, durch diese Vorgangsweise keine Verluste zu erzielen.

Üblich sind folgende Beteiligungssysteme:

1. Mechanische Systeme

- Streng mechanisches System
Hier wird dem Versicherungsnehmer jährlich ein fixer Betrag zugewiesen. Dieses System ist sehr einfach, für den Versicherungsnehmer verständlich, aber nicht gerecht.
- Halbmechanisches System
Bei diesem System wird dem Versicherungsnehme jährlich ein

gewisser Prozentsatz der bisher von ihm gezahlten Beiträge rückerstattet. Auch dieses System ist für den Versicherungsnehmer leicht nachvollziehbar.

Sowohl das mechanische System als auch das halbmechanische System sind nicht wirklich gerecht. Bei gewissen Kombinationen aus Eintrittsalter und Versicherungsdauer kann man zeigen, dass der Barwert der ausgeschütteten Überschüsse im Wesentlichen mit dem Barwert der erwirtschafteten Überschüsse übereinstimmt. Jedoch gibt es Kombinationen bei denen die Differenz der beiden Barwerte wesentlich größer als Null ist. D.h. dass entweder zu viel bzw. zu wenig ausgeschüttet wird.

2. Kennzahlssysteme

Für jede Versicherungsdauer n wird ein Vektor (a_1, a_2, \dots, a_n) definiert. Jedes a_m für $m = 1, 2, \dots, n$ ist dabei die Approximation des Deckungskapitals ${}_mV_{\bar{x}}^Z$ wobei \bar{x} ein mittleres Eintrittsalter repräsentiert. Der dem Versicherungsnehmer ausbezahlte Zinsüberschuss ist ein Prozentsatz von a_m .

Das Kennzahlssystem lässt sich extrem verfeinern. Wird es jedoch so stark verfeinert, dass es für fast alle Kombinationen aus Eintrittsalter und Versicherungsdauer passt, so stellt es keine Vereinfachung mehr dar.

3. Natürliche Systeme

Beim natürlichen System wird dem Versicherungsnehmer ein Zinsgewinnanteil, ein Risiko- und Kostengewinnanteil und ein Schlussgewinnanteil ausbezahlt.

- Der Zinsgewinnanteil wird in Prozent eines aktuellen Reservewertes ermittelt. Hierbei versucht das Versicherungsunternehmen den Prozentsatz über Jahre hinweg konstant zu halten.
- Der Risiko- und Kostengewinnanteil wird in Promille der Versicherungssumme dem Versicherungsnehmer ausbezahlt. Da hier die Abnahme dieser Gewinnanteile nicht berücksichtigt wird, verwenden Versicherungsunternehmen oft anstatt der Versicherungssumme das riskierte Kapital oder die Risikoprämie. Manchmal wird auch ein Teil des Risikoüberschusses als Todesfallbonus ausbezahlt. D.h. die Todesfalleistung wird um einen gewissen Prozentsatz erhöht.
- Der Schlussgewinnanteil entsteht dadurch, dass die Zinsgewinnanteile und die Risiko- und Kostengewinnanteile nicht exakt berechnet werden. Dadurch entstehen Beträge in den Rückstellungen für erfolgsabhängige Prämienrückerstattung bzw. Gewinnbeteiligung der Versicherungsnehmer, die nicht an Versicherungs-

nehmer zugeteilt worden sind. Bei Ablauf der Versicherung bzw. bei Tod oder Storno wird dem Versicherungsnehmer ein Teil dieser Beträge gutgeschrieben. Dies ist dann der Schlussgewinnanteil.

7 Überschussverwendung

Jedes Versicherungsunternehmen verwendet verschiedene Arten der Auszahlung der Überschüsse. Am häufigsten sind jedoch die folgenden:

- Barausschüttung: Die entstandenen Überschüsse werden dem Versicherungsnehmer direkt ausbezahlt oder auf ein Konto überwiesen. Dieses Verfahren ist jedoch nicht weit verbreitet, da ein zusätzlicher Arbeitsschritt, nämlich die Zahlungsüberweisung, notwendig ist.
- Verrechnung mit den Beiträgen: Diese Form der Gewinnbeteiligung findet vor allem bei Todesfallversicherungen ihre Anwendung. Hierbei wird die Prämie des Versicherungsnehmers um einen gewissen Betrag - der aus dem Risiko- und Kostenüberschuss entsteht - gekürzt. Die Risiko- und Kostenüberschüsse bleiben im Wesentlichen konstant. Da dies der Fall ist, und die Prämien in der Regel vorschüssig zu zahlen sind, werden dem Versicherungsnehmer zu Jahresbeginn die erwarteten Risiko- und Kostenüberschüsse von der Prämie abgezogen. Barausschüttung und Verrechnung mit den Beiträgen stellen im Prinzip die gleiche Vorgangsweise dar.
Beispiel Todesfallversicherung: Bezeichne x das Alter der versicherten Person, n die Laufzeit der Versicherung, G_t die Höhe der Gewinnbeteiligung im t -ten Jahr v der Diskontierungsfaktor und TL die Versicherungssumme. Der erwartete Barwert aller Zahlungen des Versicherungsnehmers berechnen sich wie folgt:

$$E[\text{Barwert}] = -P\ddot{a}_{x:n} + \sum_{t=0}^{n-1} G_t v_t^t p_x + TL * \sum_{t=0}^{n-1} t p_x q_{x+t} v^t$$

- Todesfallbonus: Durch die Gewinnüberschüsse bekommt der Versicherungsnehmer jährlich eine - dem Gewinnüberschuss adjustierte - Zusage für eine erhöhte Todesfalleistung. Der Todesfallbonus wird vor allem bei Todesfallversicherungen und gemischten Versicherungen angewendet.
- Bonussystem: Mit dem Überschuss wird eine zusätzliche Versicherung durch eine Einmalprämie finanziert. Diese zusätzliche Versicherung hat die selbe Laufzeit wie die, auf die diese Überschüsse angefallen

sind. Diese neue Versicherung ist natürlich wieder an weiteren Überschüssen beteiligt.

Bei reinen Todesfallversicherungen stellen der Todesfallbonus und das Bonussystem im Prinzip die gleiche Vorgangsweise dar.

Beispiel Todesfallversicherung: H_t stellt die Höhe der zusätzlichen Todesfallversicherung dar, welche mit dem Überschuss G_t mit $t = 0, \dots, n - 1$ finanziert wird.

$$E[\text{Barwert}] = -P\ddot{a}_{x:n} + \sum_{t=0}^{n-1} (TL + H_t)v_t^t p_x q_{x+t}$$

- Verzinsliche Ansammlung: Die Gewinnüberschüsse werden einem Überschusskonto des Versicherungsunternehmens gutgeschrieben. Das Geld wird wie auf einem Sparkonto verzinst.

Beispiel: v_s ist der dem Sparkonto zugehörige Abzinsungssatz. Die Auszahlung der angesparten Summe des Sparbuches erfolgt am Ende der Versicherungsdauer.

$$E[\text{Barwert}] = -P\ddot{a}_{x:n} + TL * \sum_{t=0}^{n-1} t p_x q_{x+t} v^t + \sum_{t=0}^{n-1} t p_x v_s^t * G_t$$

- Verkürzung der Versicherungsdauer: Die Überschüsse werden dem Deckungskapital zugewiesen und die Versicherungsdauer wird diesem erhöhten Deckungskapital angepasst.

Am üblichsten sind die verzinsliche Ansammlung und das Bonussystem.

Bei aufgeschobenen Leibrenten werden während der Aufschubzeit die Überschüsse verzinslich angelegt, um dann mit diesem Kapital eine zusätzliche Leibrente zu Rentenbeginn zu finanzieren. Die Überschüsse, die während der Auszahlungszeit zustande kommen, werden dazu verwendet, die Rente um einen gewissen Prozentsatz anzuheben.

8 Die Finanzierbarkeit

Die Überschussätze werden jährlich vom Vorstand des Versicherungsunternehmens festgelegt. Lebensversicherungsunternehmen versuchen diese Überschussanteilsätze über mehrere Jahre konstant zu halten. Es stellt sich dann die Frage, ob das vom Aktuar erstellte Überschussverteilungssystem bei unveränderter Überschusslage finanzierbar ist.

Ein Versicherungsnehmer (x) habe einen Versicherungsvertrag nach einem

gegebenen Tarif über n Jahre abgeschlossen. Neben den Rechnungsgrundlagen erster Ordnung - zur Berechnung der Beiträge - seien die Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung - zur Ermittlung der jährlichen Kontributionsgewinne - auch bekannt. Gegeben sei weiters ein Überschussverteilungssystem U mit Überschussätzen S .

Die Überschussbeteiligung für (x) ist individuell finanzierbar genau dann, wenn der Barwert der erwarteten Kontributionsgewinne größer oder gleich dem Barwert der nach (U, S) jährlich zugeteilten Gewinnanteile ist. Wobei die Barwerte zu Vertragsbeginn berechnet werden.

Betrachtet man nun einen gesamten Versicherungsbestand B von verschiedenen Versicherungstarifen mit Überschussverteilungssystemen U_1, U_2, \dots, U_k und Überschussätzen S_1, S_2, \dots, S_k , dann gilt:

Die Überschussbeteiligung $(U_1, U_2, \dots, U_k; S_1, S_2, \dots, S_k)$ ist für den Bestand B global finanzierbar genau dann wenn der Barwert der erwarteten Kontributionsgewinne des Bestandes größer oder gleich dem Barwert der nach $(U_1, U_2, \dots, U_k; S_1, S_2, \dots, S_k)$ jährlich zugeteilten Gewinnanteile ist. Wobei auch hier die Barwerte zum Vertragsbeginn berechnet werden.

Anmerkungen:

- Aus global finanzierbar folgt im Allgemeinen nicht individuell finanzierbar.
- Selbst wenn ein Überschussbeteiligungssystem individuell finanzierbar ist, kann es zum Konkurs des Versicherungsunternehmens führen. Hierzu ein kleines Beispiel:

Jahr	erzeugte Überschüsse	gezahlte Überschüsse
1	0	4
2	10	4

Das Versicherungsunternehmen könnte Konkurs anmelden müssen, wenn alle Versicherungsnehmer nach einem Jahr kündigen. Auf jeden Fall entstehen dem Versicherungsunternehmen Verluste.

Um die globale Finanzierbarkeit eines schon bestehenden Versicherungsbestandes oder die individuelle Finanzierbarkeit eines einzelnen schon bestehenden Versicherungsvertrages zu definieren, darf man nicht einfach in der Definition die Barwerte zum jetzigen Zeitpunkt bilden. Dabei würde man nämlich schon gebildete Rückstellungen für die Gewinnbeteiligung vernachlässigen.

Es gibt viele Versuche der Definition der Finanzierbarkeit einer Überschussbeteiligung. Dies ist jedoch nicht so einfach, da einige Punkte Schwierigkeiten bereiten:

- Die zuvor genannten Definition verwendet die Barwerte der erzielten Überschüsse und der zugeteilten Gewinne bis zum Vertragsende. Daher muss eine Annahme über die Zinsentwicklung, in extremen Fällen eventuell sogar bis 100 Jahre im Voraus, getroffen werden. Hierin liegt eine besondere Fehlerquelle. Voraussagen über einige wenige Jahre sind zumeist noch sehr zuverlässig, will man jedoch weiter in die Zukunft prognostizieren dann sind diese Werte zumeist rein spekulativ.
- Von den verwendeten prognostizierten Rechnungsgrundlagen sind die Sterbewahrscheinlichkeiten noch die sichersten.
In der Vergangenheit blieben wir von Katastrophen die die Sterblichkeit beeinflussen, wie z.B. Epidemien, Nuklearunfälle, Unfälle in Industrieanlagen, usw., verschont. (Bei Todesfall durch Krieg ist der Versicherer von der Leistung befreit.) Solche Katastrophen werden aber durch die vorsichtige Kalkulation der Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung berücksichtigt.
- Eine weitere Fehlerquelle sind die Annahmen über die Entwicklung der Kosten. Sie könnten durch Inflation ansteigen aber eventuell könnte dieser Anstieg durch Rationalisierungsmaßnahmen kompensiert werden. Inflationsraten über 3% haben eine große Auswirkung auf das Kostenergebnis.
Ein weiteres Problem sind die Abschlusskosten. Hierbei stellt sich die Frage, ob sie dem Versicherungsnehmer zu Beginn in voller Höhe angelastet werden sollen (d.h. negatives Deckungskapital zu $t = 1$), oder in voller Höhe über die gesamte Vertragsdauer oder ob sie dem gesamten Bestand angelastet werden sollen.
Ebenso stellt die verursachungsgemäße Aufteilung der Kosten auf die einzelnen Verträge ein großes Problem dar.
- Als problematisch gilt auch die Aufteilung der Rückstellungen für die erfolgsabhängige Prämienrückerstattung bzw. Gewinnbeteiligung der Versicherungsnehmer. Der Versicherungsnehmer hat keinen direkten Anspruch darauf. Jedoch werden Schlussüberschussanteile, die jährlich verdient werden, durch diese Rückstellungen für die einzelnen Versicherungsverträge über die gesamte Laufzeit finanziert.
- Stornierungen verursachen je nach Zeitpunkt des Stornos entweder Gewinne oder Verluste. Bei gezillmerten Verträgen entstehen dem Versicherungsunternehmen in den ersten Jahren Verluste, in späteren

Jahren kann durch einen Stornoabzug ein Gewinn erzielt werden. Daher ist auch über die Entwicklung der Stornowahrscheinlichkeiten eine Annahme zu treffen.

9 Ein Finanzierbarkeitsnachweis

Für den hier betrachteten Finanzierbarkeitsnachweis benötigt man sämtliche Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung als Parameter mit Ausnahme des Zinses. Es ist ein innerer Zins i' so zu bestimmen, dass die mit diesem inneren Zins erwirtschafteten Überschüsse ausreichen, das Überschussbeteiligungssystem zu finanzieren. Ist der erwirtschaftete Zins größer oder gleich dem inneren Zins, so ist das Überschussbeteiligungssystem finanzierbar.

9.1 Individuelle Betrachtung

Das Beitrittsalter sei x , die Versicherungsdauer sei n , T das Todesfall-, E das Erlebensfall- und B das Beitragsspektrum.

Es wird zusätzlich folgende Notation verwendet:

R_m^x	der zu Beginn an garantierte Rückkaufwert plus die noch nicht ausbezahlten Überschussanteile
s_m	Stornowahrscheinlichkeit im m -ten Jahr
A_m	Deckungskapital zweiter Ordnung
${}_m p'_{x+j}$	m -jährige Verbleibenswahrscheinlichkeit = $= \prod_{k=1}^m (1 - s_{k+j})(1 - q_{x+j-1+k})$

Die Stornowahrscheinlichkeit ist zunächst abhängig von dem Beitrittsalter x und der Vertragsdauer n . Eigentlich ist die Stornowahrscheinlichkeit auch abhängig vom Versicherungstarif.

Eigentlich ist auch q_x aufgrund der Selektion abhängig vom Versicherungstarif. In der vereinfachenden Annahme, dass sich dieser nicht ändert, kann diese Abhängigkeit vernachlässigt werden.

Im folgenden enthalten E_m und T_m zusätzlich die in den ersten $(m-1)$ Vertragsjahren erwirtschafteten Überschussanteile. Dieser Betrachtung wird ein Überschussbeteiligungssystem mit bestimmten Überschussanteilsätzen und eine Verwendung der Überschüsse zugrunde gelegt.

Man erhält folgendens Gleichungssystem für $1 \leq m \leq n$:

$$\begin{aligned}
A_0 &= -\alpha \\
(1 - s_m)(1 - q'_{x+m-1})A_m &= A_{m-1}(1 + i') + (B_m - K_m)(1 + i') - \\
&\quad - q'_{x+m-1}T_m - \\
&\quad - (1 - q'_{x+m-1})((1 - s_m)E_m + s_mR_m)
\end{aligned}$$

Nun sollen für alle $0 \leq m \leq n$ die Erwartungswerte A_m gebildet werden. Der innere Zins i' ist der für die Finanzierung sämtlicher Leistungen bei Tod, Storno oder Erleben unter der Bedingung $A_n = 0$ benötigte Zins. Löst man die vorherige Gleichung auf erhält man:

$$\begin{aligned}
A_0 &= -\alpha \\
A_1 &= \frac{(-\alpha + B_1 - K_1)(1 + i') - q'_x T_1 - (1 - q'_x)((1 - s_1)E_1 + s_1 R_1)}{(1 - s_1)(1 - q'_x)} \\
A_2 &= \frac{((-\alpha + B_1 - K_1)(1 + i') - q'_x T_1 - (1 - q'_x)((1 - s_1)E_1 + s_1 R_1))(1 + i')}{(1 - s_1)(1 - q'_x)(1 - s_2)(1 - q'_{x+1})} + \\
&\quad + \frac{(B_2 - K_2)(1 + i') - q'_{x+1} T_2 - (1 - q'_{x+1})((1 - s_2)E_2 + s_2 R_2)}{(1 - s_2)(1 - q'_{x+1})} \\
A_m &= \sum_{j=1}^m \frac{(1 + i')^{m-j}}{\prod_{k=j}^m (1 - s_k)(1 - q'_{x+k-1})} * (((B_j - K_j)1_{j \neq 1} + \\
&\quad + (B_j - K_j - \alpha)1_{j=1})(1 + i') - q'_{x+j-1} T_j - \\
&\quad - (1 - q'_{x+j-1})((1 - s_j)E_j + s_j R_j))
\end{aligned}$$

Verwendet man die m -jährige Verbleibenswahrscheinlichkeit und $m = n$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{j=1}^n \frac{(1+i')^{n-j}}{n-j+1 p'_{x+j-1}} * (((B_j - K_j)1_{j \neq 1} + \\
&\quad + (B_j - K_j - \alpha)1_{j=1})(1+i') - q'_{x+j-1}T_j - \\
&\quad - (1 - q'_{x+j-1})((1 - s_j)E_j + s_j R_j)) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{(1+i')^{n-j} p'_x}{n-j+1 p'_{x+j-1} *_{j-1} p'_x} * (((B_j - K_j)1_{j \neq 1} + \\
&\quad + (B_j - K_j - \alpha)1_{j=1})(1+i') - q'_{x+j-1}T_j - \\
&\quad - (1 - q'_{x+j-1})((1 - s_j)E_j + s_j R_j)) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{(1+i')^{n-j}}{n p'_x} *_{j-1} p'_x (((B_j - K_j)1_{j \neq 1} + \\
&\quad + (B_j - K_j - \alpha)1_{j=1})(1+i') - q'_{x+j-1}T_j - \\
&\quad - (1 - q'_{x+j-1})((1 - s_j)E_j + s_j R_j))
\end{aligned}$$

Wird die erwartete Leistung zum Ende des j -ten Vertragsjahres mit

$$EL_j := {}_{j-1} p'_x (q'_{x+j-1} T_j + (1 - q'_{x+j-1})((1 - s_j)E_j + s_j R_j))$$

bezeichnet, so erhält man:

$$n p'_x A_n = \sum_{j=1}^n (1+i')^{n-j} ({}_{j-1} p'_x ((B_j - K_j)1_{j \neq 1} + (B_j - K_j - \alpha)1_{j=1})(1+i') - EL_j)$$

Eine der Bedingungen zur Bestimmung des inneren Zins ist bekanntlich $A_n = 0$. Deshalb ist folgende Gleichung zu lösen:

$$\sum_{j=1}^n (1+i')^{n-j} ({}_{j-1} p'_x ((B_j - K_j)1_{j \neq 1} + (B_j - K_j - \alpha)1_{j=1})(1+i') - EL_j) = 0$$

Dies bedeutet, dass eine Nullstelle des folgenden Polynoms zu bestimmen ist:

$$\begin{aligned}
f(i) &= \sum_{j=1}^n (1+i)^{n-j} ({}_{j-1}p'_x((B_j - K_j)1_{j \neq 1} + (B_j - K_j - \alpha)1_{j=1}))(1+i) - EL_j \\
&= \sum_{j=1}^n (1+i)^{n-j+1} ({}_{j-1}p'_x((B_j - K_j)1_{j \neq 1} + (B_j - K_j - \alpha)1_{j=1})) - \\
&\quad - \sum_{j=1}^n (1+i)^{n-j} EL_j
\end{aligned}$$

Substituiert man nun $u = 1 + i$ so erhält man:

$$\begin{aligned}
F(u) &= \sum_{j=0}^{n-1} u^{n-j} ({}_j p'_x((B_{j+1} - K_{j+1})1_{j \neq 1} + (B_{j+1} - K_{j+1} - \alpha)1_{j=1})) - \\
&\quad - \sum_{j=1}^n u^{n-j} EL_j \\
&= u^n ((B_{j+1} - K_{j+1})1_{j \neq 1} + (B_{j+1} - K_{j+1} - \alpha)1_{j=1}) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} u^{n-j} ({}_j p'_x((B_{j+1} - K_{j+1})1_{j \neq 1} + \\
&\quad + (B_{j+1} - K_{j+1} - \alpha)1_{j=1})) - EL_j - EL_n
\end{aligned}$$

Bei realistischen Versicherungstarifen ist die erwartete Leistung im n -ten Versicherungsjahr positiv, das bedeutet: $F(0) = -EL_n < 0$.

Zur Berechnung des inneren Zins benötigt man die Nullstellen des Polynoms F . Da F vom Grad n ist, hat F höchstens n Nullstellen. Das Polynom ist durch seine Koeffizienten bestimmt, welche sich aus den Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung sowie den Leistungs-, Beitrags- und Rückkaufspektren ergeben. Da über die Spektren und das Gewinnbeteiligungssystem keine Annahmen getroffen wurden, sind die Koeffizienten zunächst noch sehr willkürlich. Zu beachten ist natürlich die Gewährung des Äquivalenzprinzips. Die in der Praxis anzutreffenden Polynome haben meistens nur eine Nullstelle oder zwei reelle einfache Nullstellen.

Bei Versicherungen mit kurzen Versicherungsdauern oder bei Versicherungen gegen Einmalprämie reicht die erste Jahresprämie meistens aus, die Abschlusskosten zu decken, es gilt folglich: $B_1 - K_1 - \alpha > 0$. Laut Mittelwertsatz existiert mindestens eine positive Nullstelle, da $\lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = +\infty$.

Kann man aufgrund der Vorzeichenwechsel darauf schließen, dass nur eine Nullstelle existiert, und gilt für den erwirtschafteten Zins $1 + i > u$, dann ist das Überschussbeteiligungssystem finanzierbar und es ergibt sich ein Gewinn für das Versicherungsunternehmen.

Für Versicherungsdauern über 12 Jahre reicht die erste Jahresprämie zumeist nicht aus um die Abschlusskosten zu decken. D.h. $B_1 - K_1 - \alpha < 0$ und somit $\lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = -\infty$. Existieren in diesem Fall zwei Nullstellen $0 < u < u'$ so gilt für $u < 1 + i < u'$ dass das Überschussbeteiligungssystem finanzierbar ist. Ist $1 + i < u$ so ist es nicht finanzierbar. Für $u' < 1 + i$ ist die Verzinsung des negativen Kapitals in den ersten Versicherungsjahren so stark, dass dieser negative Wert nicht durch die positiven Zahlungen ausgeglichen werden kann.

9.2 Globale Betrachtung

Der innere Zins eines einzelnen Versicherungsvertrages sagt noch nichts über die Finanzierbarkeit eines ganzen Bestandes aus. Für die Finanzierbarkeit eines Bestandes muss wie folgt modifiziert werden:

1. Der Gesamtbestand wird in Zerlegungsklassen aufgeteilt. In einer Zerlegungsklasse befinden sich Verträge mit gleichem Beitrittsalter, gleicher Versicherungsdauer und gleicher schon abgelaufener Zeit. Jede Zerlegungsklasse wird wie ein einzelner fiktiver Vertrag in der Höhe der Summe der darin befindlichen Versicherungssummen angesehen, der am 1.7. den Jahrestag hat. Man nimmt an, dass die Beitritte über das Jahr gleichverteilt sind, und deshalb verwendet man den 1.7. als approximativen Beitrittstag.
2. Da sich die meisten Verträge schon einige Zeit im Bestand befinden, muss für das Deckungskapital gelten:

$$\begin{aligned}
 A_m^- &= \text{vorhandenes Deckungskapital} + \\
 &\quad + \text{vorhandenes Gewinn Guthaben} + \\
 &\quad + \text{vorhandene Gewinnüberträge} + \\
 &\quad + \text{Anteile der Gewinnbeteiligungsrückstellung}
 \end{aligned}$$

3. Aus jeder Zerlegungsklasse erhält man ein Gleichungssystem. Wie vorhin lässt sich aus jedem Gleichungssystem ein Polynom bilden. Addiert man diese Polynome, so erhält man ein Polynom des Grades $e \leq 100$. In den meisten praktischen Fällen besitzt dieses Polynom wiederum nur ein bis zwei einfache reelle Nullstellen, die sich durch ein numerisches Verfahren bestimmen lassen.

10 Variation der Rechnungsgrundlagen

Bei dem Finanzierbarkeitsnachweis wurden Annahmen über die künftige Entwicklung der Leistungen und Rückkaufwerte, die künftigen Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten und über die Kostenentwicklung getroffen. Welche Auswirkungen haben nun Änderungen der Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten sowie der Kosten?

Definiert man für die Rechnungsgrundlagen Sterblichkeit, Storno und Kosten w ein Intervall $I_w := [\underline{w}, \bar{w}]$, so können die im Polynom verwendeten Rechnungsgrundlagen dargestellt werden als ein Vektor

$$c = (q_x, \dots, q_{x+n-1}, s_1, \dots, s_n, \alpha, K_1, \dots, K_n) \in \mathbb{R}.$$

Da die Parameter variieren können, gilt für den Vektor c :

$$c \in C := \prod_{i=0}^{n-1} I_{q_{x+i}} \times \prod_{i=1}^n I_{s_i} \times \prod_{i=1}^n I_{K_i}.$$

Im folgenden wird angenommen, dass die Intervalle I_w so gewählt sind, dass ein Zins i existiert, unter dem das Überschussbeteiligungssystem finanzierbar ist.

P sei nun die Funktion die sich ergibt, wenn in dem Polynom F die Parameter in den Intervallen I_w variieren. Also $P : C \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Nach obiger Annahme existiert zu jedem $c \in C$ ein $\eta \in \mathbb{R}$ mit $P(c, \eta) = 0$. Laut der Theorie der impliziten Funktionen existiert eine stetig differenzierbare Funktion

$$\eta : \mathbb{R}^{3n+1} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad P(c, \eta(c)) = 0$$

sofern es mindestens eine Nullstelle $P(c, \cdot) = 0$ gibt, sofern P k -mal stetig differenzierbar ist mit $k > 1$ und soferne $\frac{\partial P(c, \eta)}{\partial x} \neq 0$ gilt.

Existiert nun eine stetig differenzierbare Funktion $\eta : c \rightarrow \mathbb{R}$, dann existiert wegen der Kompaktheit der Menge C auch ihr Minimum bzw. Maximum. Deshalb sind die folgenden Optimierungsaufgaben lösbar:

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \max_{c \in C} \{\eta(c) | P(c, \eta(c)) = 0\} \\ \underline{c} &= \min_{c \in C} \{\eta(c) | P(c, \eta(c)) = 0\} \end{aligned}$$

Hat man \bar{c} und \underline{c} berechnet, so gilt für jede beliebige Wahl der Rechnungsgrundlagen w , soferne sie sich im Intervall I_w befinden, dass der innere Zins im Intervall $[\underline{c} - 1, \bar{c} - 1]$ liegen muss.

11 Rentabilität eines Lebensversicherungsvertrages

Unter der Rentabilität einer Lebensversicherung versteht man den Zinsfuß, der einheitlich über die gesamte Versicherungsdauer gelten müsste, damit

für einen Bestand von Versicherten die Leistungen des Lebensversicherungsunternehmens genau aus der verzinslichen Ansammlung der gezahlten Versicherungsbeiträge finanziert werden könnte. Es gibt verschiedene Rentabilitätsbetrachtungen, je nachdem welche Leistungen des Versicherungsunternehmens einbezogen werden. Werden z.B. alle Leistungen, also Erlebensfall-, Todesfall-, Rückkaufsleistung und Kosten, einbezogen, so nennt man diese Rendite den Effektivzinsfuß der mit dem oben definierten inneren Zins übereinstimmt.

Probleme beim Vergleich eines Lebensversicherungsvertrages mit anderen Kapitalanlageformen:

1. Bei anderen Kapitalanlageformen werden sämtliche Einlagen verzinst, wohingegen bei Lebensversicherungsverträgen ein Teil der Einlagen benutzt wird, um angefallene Kosten zu decken.
2. Lebensversicherungsverträge beinhalten den Versicherungsschutz im Todesfall. Dadurch entstehen natürlich auch Kosten beim Versicherungsunternehmen die bei anderen Kapitalanlageformen nicht anfallen. Man könnte versuchen, bei Versicherungsverträgen die Kosten in einen Sparteil und einen Risikoteil aufzuteilen. Dies ist jedoch in der Praxis nicht möglich, da bestimmte Kosten (wie z.B. das Gehalt des Vorstandes) nicht zugeteilt werden können.

Zu berücksichtigen ist auch, dass dem Versicherungsnehmer unter bestimmten Voraussetzungen bei dem Abschluss eines Lebensversicherungsvertrages gewisse Steuererleichterungen zugute kommen.

12 Literaturverzeichnis

- Wolfsdorf K.; Versicherungsmathematik Teil 1 Personenversicherung, Teubner Studienbücher Mathematik, 1986
- Dr. Karl-H. Wolff; Versicherungsmathematik, Springer-Verlag/Wien, 1970
- Gewinnbeteiligungsverordnung, BGBl II 389/2006