Seminar aus Finanz-und Versicherungsmathematik

# Riemann-Stieltjes-Integral

Junjian YANG

TU-Wien

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Vorwort

Diese Seminararbeit basiert hauptsächlich auf dem Lehrbuch **Analysis** von Walter aus dem Jahr 1995 und dem Lehrbuch **Höhere Analysis** von Runckel aus dem Jahr 2000. Eine vollständige Auflistung der verwendeten Literatur findet sich am Ende dieser Arbeit im Literaturnachweis.

# 2 Einleitung

Im Jahre 1894 veröffentlichte der holländische Mathematiker Thomas-Jean Stieltjes eine originelle Arbeit über Kettenbrüche, in welcher er ein neues später nach ihm benanntes Integral $\int_a^b f dg$ einführte, wobei $g$ eine Funktion darstellt.

Aber das Stieltjes-Integral fand zunächst wenig Bedeutung. Das änderte sich, als im Jahre 1909 der ungarische Mathematiker Friedrich Riesz, einer der Begründer der Funktionalanalysis, ein wichtiges funktionalanalytisches Problem löste. In seinem berühmten Darstellungssatz zeigt er, dass jede stetige lineare Abbildung $L : C(I) \to \mathbb{R}$ als Stieltjes-Integral

$$f \to L(f) = \int_a^b f(t)dg(t) \quad \text{mit} \quad g \in BV(I)$$

darstellbar ist, wobei $I$ ein kompaktes Intervall ist und $BV(I)$ die Menge der Funktionen von beschränkter Variation auf $I$ ist. In der Folgezeit wurde das Stieltjes-Integral, insbesondere in seiner von Johann Radon entwickelten, im Lebesgueschen Sinne verallgemeinerten Fassung, zu einem wirkungsvollen Arbeitsmittel der Analysis und zum Vorreiter der allgemeinen Maß-und Integrationstheorie.

# 3 Wiederholung zum Riemann-Integral

Die Bestimmung des Flächeninhaltes von geometrischen Figuren in der Ebene gehört zu den ältesten und prominentesten Aufgabenstellungen der Mathematik. Eine Vereinfachung und Formalisierung des Problems bestehlt darin, Flächen unter Graphen von reellen Funktionen zu berechnen. Dadurch gelangt man zu einem Integralbegriff.

## 3.1 Oberes und unteres Integral

Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall, $f$ eine reelle Funktion, sowie $F$ die Fläche zwischen der x-Achse und $\Gamma(f)$, also dem Graphen der Funktion $f$. Eine erste Eingrenzung von $F$ erhält man durch

$$(b-a) \cdot \inf_{[a,b]} f \leq F \leq (b-a) \cdot \sup_{[a,b]} f.$$

Zur Verbesserung sucht man die Infimums-bzw. Supremumsbildung auf kleinere Intervalle zu reduzieren. Man zerlegt also das Intervall $[a, b]$.

Eine **Zerlegung** $\mathcal{Z} = I_1, \ldots, I_p$ eines Intervalls $I = [a, b]$ ist eine Darstellung $I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_p = [a, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \cdots \cup [t_{p-1}, b]$ dieses Intervalls bei der die $I_j$ durch Teilung von $I$ an den Teilungspunkten $t_1 < t_2 < \cdots < t_{p-1}$ entstehen. Entsteht eine Zerlegung $\mathcal{Z}'$ aus $\mathcal{Z}$ durch Einführung zusätzlicher Teilungspunkte, so nennt man $\mathcal{Z}'$ eine **Verfeinerung** von $\mathcal{Z}$.

Zu jeder Zerlegung $\mathcal{Z} = [a = t_0, t_1] \cup \cdots \cup [t_{p-1}, b = t_p]$ von $[a, b]$ erhält man die

- **Obersumme**:

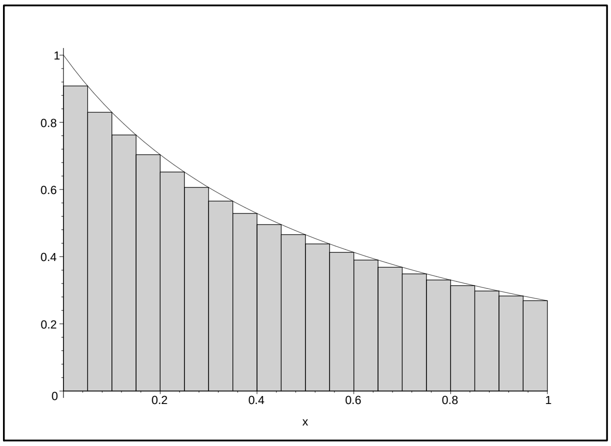
$$\overline{S}(f, \mathcal{Z}) = \sum_{j=1}^{p} (t_j - t_{j-1}) \cdot \sup_{I_j} f$$

und die

- **Untersumme** :

$$\underline{S}(f, \mathcal{Z}) = \sum_{j=1}^{p} (t_j - t_{j-1}) \cdot \inf_{I_j} f$$

Für auf $I$ beschränktes $f$ sind beide endlich.



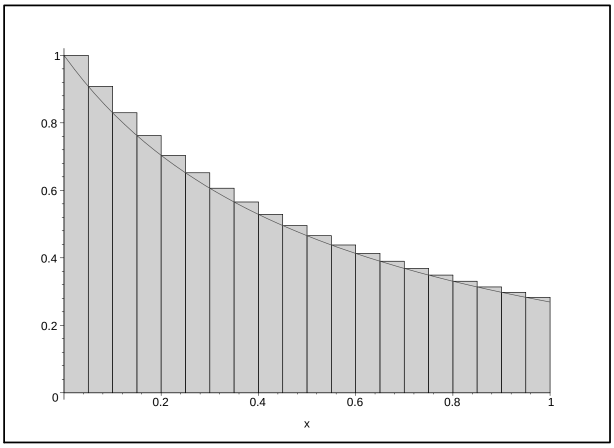




Abbildung 1: Unter- und Obersumme für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x+e^x}$

**Satz 3.1.** Ist $\mathcal{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$, so gilt:

$$\underline{S}(f, \mathcal{Z}) \leq \underline{S}(f, \mathcal{Z}') \leq \overline{S}(f, \mathcal{Z}') \leq \overline{S}(f, \mathcal{Z}).$$

Das heißt, die Obersumme fällt, die Untersumme wächst bei Verfeinerung. Und wir sehen, dass Untersummen niemals größer als Obersummen sind: $\underline{S}(f, \mathcal{Z}_1) \leq \overline{S}(f, \mathcal{Z}_2)$ für beliebige Zerlegungen $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ von $I$.

Damit erhält man, dass der $F$ zuzuordnende Wert zwischen dem von Darboux eingeführten

- **unteren Integral**:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{\mathcal{Z}} \underline{S}(f, \mathcal{Z})$$

und

- **oberen Integral** :

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{\mathcal{Z}} \overline{S}(f, \mathcal{Z})$$

von $f$ über $[a,b]$ liegen muss. $a$ und $b$ heißen die **Integrationsgrenzen**, $f$ heißt der **Integrand**.

Man definiert die **Feinheit** $|\mathcal{Z}|$ als das Maximum der Längen der zu $\mathcal{Z}$ gehörigen Teilintervalle von $I$. Für jede auf $[a,b]$ beschränkte Funktion $f$ gilt:

$$\overline{\int_a^b} f = \lim_{|\mathcal{Z}|\to 0} \overline{S}(f,\mathcal{Z}) \quad \text{und} \quad \underline{\int_a^b} f = \lim_{|\mathcal{Z}|\to 0} \underline{S}(f,\mathcal{Z})$$

Man kann daher das obere bzw. untere Integral einer integrierbaren Funktion $f$ über $[a,b]$ berechnen als Limes der Ober-bzw. Untersummen von $f$ zu den Zerlegungen einer einzigen Folge $\mathcal{Z}_k$ von Zerlegungen von $I$ mit $\lim_{k\to\infty} |\mathcal{Z}_k| = 0$.

## 3.2 Das Riemann-Integral

Riemann verwendete zur Approximation von $F$ anstelle der in den Ober-und Untersummen auftretenden Suprema und Infima Funktionswerte von $f$: Ist $\mathcal{Z} = \{I_1, \ldots, I_p\}$ eine Zerlegung von $I$, so nennt man jede Auswahl $B = \{b_1, \ldots, b_p\}$ von Punkten $b_j \in I_j$ eine **zur Zerlegung $\mathcal{Z}$ gehörige Belegung von $I$**. Damit erhält man die **Riemann-Summe**

$$S(f,\mathcal{Z},B) = \sum_{j=1}^{p} (t_j - t_{j-1}) \cdot f(b_j)$$

von $f$ zur Zerlegung $\mathcal{Z}$ und Belegung $B$.

**Definition 3.2. (*Riemann-Integral*):** Existiert bei beliebiger Wahl der zur jeweiligen Zerlegung $\mathcal{Z}$ gehörigen Belegung $B$ der Grenzwert $\lim_{|\mathcal{Z}|\to 0} S(f,\mathcal{Z},B)$ in $\mathbb{R}$ und ist er für alle Belegungen gleich, so nennt man diesen Grenzwert das **Riemann-Integral von $f$ über** $[a,b]$; symbolisch: $\int_a^b f(x)dx$ oder kurz $\int_a^b f$.

Existiert $\int_a^b f(x)dx$, so nennt man $f$ über $[a,b]$ **Riemann-integrierbar**.

**Satz 3.3.** Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann über $[a,b]$ Riemann-integrierbar, wenn

- $f$ auf [a,b] beschränkt ist und
- das obere und das untere Integral von $f$ über $[a,b]$ gleich sind, oder gleichbedeutend:

$$\inf_{\mathcal{Z}} (\overline{S}(f,\mathcal{Z}) - \underline{S}(f,\mathcal{Z})) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{|\mathcal{Z}|\to 0} (\overline{S}(f,\mathcal{Z}) - \underline{S}(f,\mathcal{Z})) = 0$$

Es gilt dann:

$$\underline{\int_a^b} f = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f.$$

**Satz 3.4.** Ist $f$ über $[a,c]$ und über $[c,b]$ integrierbar mit $a < c < b$, so auch über $[a,b]$ und es gilt:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad \text{und} \quad \int_a^b f = -\int_b^a f.$$

## 3.3 Kriterien für Integrierbarkeit

**Satz 3.5.** Jede auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ stetige Funktion ist über $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

**Satz 3.6.** Das Abändern endlich vieler Werte einer Funktion $f$ auf $[a, b]$ ändert nichts an deren Integrierbarkeit. Der Wert des Integrals bleibt ungeändert.

**Lemma 3.7.** Jede Funktion $f$, die auf $[a, b]$ mit Ausnahme von endlich vielen Sprungstellen stetig ist, ist über $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

**Definition 3.8. (*Lebesgue-Nullmenge*):** Eine Teilmenge $N$ von $\mathbb{R}$ heißt **Lebesgue-Nullmenge**, wenn sie für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ durch höchstens abzählbar viele offene Intervalle $I_n^\varepsilon$ mit Gesamtlänge $\sum_{n=1}^{k/\infty} l(I_n^\varepsilon) < \varepsilon$ überdeckt werden kann.

**Satz 3.9.** Eine auf $[a, b]$ definierte reelle Funktion $f$ ist genau dann über $[a, b]$ Riemann-integrierbar, wenn

- $f$ auf $[a, b]$ beschränkt ist und
- die Menge der Unstetigkeitsstellen von $f$ in $[a, b]$ eine Lebesgue-Nullmenge ist, das heißt, dass $f$ auf $[a, b]$ fast überall stetig ist.

**Lemma 3.10.** Jede auf $[a, b]$ beschränkte Funktion mit höchstens abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen ist über $[a, b]$ Riemann-integrierbar. Speziell ist also jede auf $[a, b]$ monotone Funktion über $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

**Lemma 3.11.** Sind $f$ und $g$ über $[a, b]$ Riemann-integrierbar und auf $[a, b]$ fast überall gleicher Funktionswert, so gilt:

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Für nichtnegative, über $[a, b]$ Riemann-integrierbare Funktionen $f$ gilt sogar:

$$\int_a^b f = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \quad \text{fast überall auf } [a, b].$$

## 3.4 Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren

**Definition 3.12. (*unbestimmtes Integral*):** Für eine reelle Funktion $f$ und jedes $c \in D(f)$ nennt man die Abbildung

$$x \to \int_c^x f(t)dt$$

ein **unbestimmtes Integral** von $f$.

**Satz 3.13. (*Eigenschaften*):**
Jedes unbestimmte Integral $\int_d^x f$ von $f$ hat unabhängig vom Startpunkt $d \in I$ denselben maximalen Definitionsbereich. Je zwei derartige unbestimmte Integrale mit Startpunkten $d_1$ und $d_2$

unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante $\int_{d_2}^{d_1} f$.

Jedes unbestimmte Integral ist auf seinem maximalen Definitionsbereich stetig.

Jedes unbestimmte Integral ist an jeder Stetigkeitsstelle $x$ des Integranden $f$ differenzierbar; es gilt dort:

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = f(x).$$

**Definition 3.14. (*Stammfunktion*):** Eine Funktion $F$ heißt Stammfunktion von $f$ auf $M \subseteq D(f) \cap D(F)$, wenn für alle $x \in M$ gilt: $F'(x) = f(x)$.

**Satz 3.15. (*Der Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung*):** Hat die Funktion $f$ auf einem Intervall $I$ eine Stammfunktion $F$ und existieren dort die unbestimmten Integrale von $f$, so gilt für jedes von ihnen:

$$\int_c^x f(t)dt = F(x) - F(c).$$

Im Fall der Existenz einer Stammfunktion $F$ von $f$ gilt also auch an den Unstetigkeitsstellen von $f$:

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = F'(x) = f(x),$$

das heißt: existieren auf $I$ eine Stammfunktion $F$ von $f$ und die unbestimmten Integrale von $f$, so ist jedes von ihnen eine Stammfunktion.

**Lemma 3.16.** Stammfunktionen sind stets nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Im Fall $F' = f$ gilt:

$$\int f = F + c.$$

für beliebige $c \in \mathbb{R}$.

## 3.5 Eigenschaften des Integrals

**Satz 3.17. (*Eigenschaften*):** Im Fall der Existenz der entsprechenden Integrale bzw. Stammfunktionen gilt:

1. $$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad \text{bzw.} \quad S(f+g) = S(f) + S(g) + c$$

2. $$\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f \quad \text{bzw.} \quad S(\alpha f) = \alpha S(f) + c \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

3. $$f \leq g \quad \text{auf} \quad [a,b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

4. $$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

**Satz 3.18. (*partielle Integration*):** Sind $f$ und $g$ auf $[a,b]$ differenzierbar, so gilt:
1. Hat $f'g$ auf $[a,b]$ eine Stammfunktion, so auch $fg'$ und es gilt:

$$S(f'g) = fg - S(fg') + c$$

2. Ist $f'g$ und $fg'$ über $[a,b]$ Riemann-integrierbar, so gilt:

$$\int_a^b (f'g)(x)dx = (fg)(x)|_a^b - \int_a^b (fg')(x)dx$$

**Satz 3.19. (*Substitutionsregel*):** Ist $\varphi$ eine differenzierbare Fuinktion, die $[a,b]$ auf $[\alpha,\beta]$ abbildet, so gilt:

1. Hat f auf $[\alpha,\beta]$ eine Stammfunktion, so gibt es auf $[a,b]$ eine Stammfunktion von $(f\circ g)\cdot\varphi'$ und es ist dort
$$S(f)\circ\varphi = S((f\circ\varphi)\cdot\varphi') + c$$
2. Hat f auf $[\alpha,\beta]$ eine Stammfunktion oder ist $\varphi' \geq 0$ (bzw. $\leq 0$) auf $[a,b]$, also $\varphi$ dort monoton, so gilt:
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(u))\cdot\varphi'(u)du$$
falls beide Integrale existieren.

## 3.6 Die Mittelwertsätze der Integralrechnung

**Satz 3.20. (*1. Mittelwertsatz*):** Sind $f$ und $g$ über $[a,b]$ Riemann-integrierbar und ist $g \geq 0$ auf $[a,b]$, so gibt es eine Zahl $\alpha$ mit $\inf_{[a,b]} f \leq \alpha \leq \sup_{[a,b]} f$, für die gilt:

$$\int_a^b (fg)(x)dx = \alpha \int_a^b g(x)dx;$$

ist $f$ auf $[a,b]$ stetig, so gilt $\alpha = f(c)$ für ein $c \in [a,b]$ und es ist

$$\int_a^b (fg)(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Für $g = 1$ erhält man speziell:

**Lemma 3.21.** Ist $f$ über $[a,b]$ Riemann-integrierbar, so gibt es eine Zahl $\alpha$ mit $\inf_{[a,b]} f \leq \alpha \leq \sup_{[a,b]} f$, für die gilt:
$$\int_a^b f(x) = \alpha(b-a).$$
Ist $f$ auf $[a,b]$ stetig, so gilt $\alpha = f(c)$ für ein $c \in [a,b]$ und

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

**Satz 3.22.** (*2. Mittelwertsatz*)**:** Ist $f$ über [a,b] Riemann-integrierbar und $g$ auf $[a,b]$ monoton, so folgt:

$$\int_a^b (fg)(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx$$

für passendes $c \in [a,b]$.

### 3.7 Die Integration von Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Mit Hilfe des Lebesgue-Nullmengen-Kriteriums und durch elementare Abschätzung erhält man:

**Satz 3.23.** Ist $\{f_n\}$ eine auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergente Folge Riemann-integrierbarer Funktionen, so ist auch die Grenzfunktion dieser Folge über $[a,b]$ Riemann-integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n.$$

**Satz 3.24.** Ist $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergente Reihe Riemann-integrierbarer Funktionen, so ist auch die Grenzfunktion dieser Reihe über $[a,b]$ Riemann-integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n.$$

Bei gleichmäßiger Konvergenz darf gliedweise integriert werden, d.h. darf man Limes und Integral vertauschen.

# 4 Riemann-Stietjes-Integral

## 4.1 Definition des Integrals

Bei der Konstruktion des Riemann-Integrals über Unter- bzw. Ober bzw. Riemann-Summen werden Infima bzw. Suprema bzw. Funktionswerte des Integranden durch die Länge des entsprechenden Zerlegungsintervalls gewichtet. Nun sollen auch andere Gewichtungen betrachtet werden: man denke etwas bei einer Bewegung an eine Gewichtung durch die zurückgelegte Strecke anstelle der Länge des Zeitintervalls.

Analog zu den entsprechenden Begriffen für das Riemann-Integral können entsprechende Ober- und Untersummen definiert werden.

**Definition 4.1.** Seien $f$ und $g$: $[a,b] \to L$ beschränkte Funktionen und sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit der Teilungspunkten $a = t_0, t_1, \ldots, t_{p(\mathcal{Z})} = b$ und sei $B = \{b_1, \ldots, b_{p(\mathcal{Z})}\}$ die zugehörige Belegung. Dann ist:

- die **Stieltjes-Untersumme** von $f$ bezüglich $g$ zur Zerlegung $\mathcal{Z}$ definiert durch

$$\underline{\sigma}(f,\mathcal{Z},g) = \sum_{j=1}^{p(\mathcal{Z})} \inf_{[t_{j-1},t_j]} f \cdot (g(t_j) - g(t_{j-1}))$$

- die **Stieltjes-Obersumme** von $f$ bezüglich $g$ zur Zerlegung $\mathcal{Z}$ definiert durch

$$\overline{\sigma}(f,\mathcal{Z},g) = \sum_{j=1}^{p(\mathcal{Z})} \sup_{[t_{j-1},t_j]} f \cdot (g(t_j) - g(t_{j-1}))$$

- die **Riemann-Stieltjes-Summe** von $f$ bezüglich $g$ zur Zerlegung $\mathcal{Z}$ und zur Belegung $B$ definiert durch

$$\sigma(f,\mathcal{Z},B,g) = \sum_{j=1}^{p(\mathcal{Z})} f(b_j) \cdot (g(t_j) - g(t_{j-1}))$$

Für nicht monoton wachsendes $g$ ist im allgemeinen nicht zu erwarten, dass die Riemann-Stieltjes-Summe zwischen den entsprechenden Unter-und Obersummen liegen. Ebensowenig wird das Supremum der Untersummen bzw. das Infimum der Obersummen gleich deren Limes für $|\mathcal{Z}| \to 0$ sein. Man gelangt daher zu zwei verschiedenen Integralbegriffen.

**Definition 4.2. (*Darboux-Stieltjes-Integral*):** Seien $f$ und $g$: $[a,b] \to L$ beschränkte Funktionen und sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Ist

$$\sup_{\mathcal{Z}} \underline{\sigma}(f,\mathcal{Z},g) = \inf_{\mathcal{Z}} \overline{\sigma}(f,\mathcal{Z},g),$$

dann heißt dieser Wert das **Darboux-Stieltjes-Integral** von $f$ bezüglich $g$ über $[a,b]$.

**Definition 4.3. (*Riemann-Stieltjes-Integral*):** Seien $f$ und $g$: $[a,b] \to L$ beschränkte Funktionen und sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und sei $B$ die zugehörige Belegung. Konvergieren die Riemann-Stieltjes-Summen für $|\mathcal{Z}| \to 0$ unabhängig von den gewählten Belegungen gegen einen einzigen Grenzwert, das heißt

$$\lim_{|\mathcal{Z}| \to 0} \sigma(f,\mathcal{Z},B,g) = \int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b fdg,$$

so nennt man diesen Grenzwert das **Riemann-Stieltjes-Integral** von $f$ bezüglich $g$ über $[a,b]$.

Das heißt, es existiert genau der Wert $I = \int_a^b fdg$ genau dann, wenn für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}_\varepsilon$ von $[a,b]$ existiert, sodass für alle Verfeinerungszerlegungen $\mathcal{Z}$ von $\mathcal{Z}_\varepsilon$ ($\mathcal{Z} \supset \mathcal{Z}_\varepsilon$) und für alle RS-Summen $S := \sigma(f,\mathcal{Z},B,g)$ von $f$ bezüglich $g$ zur $\mathcal{Z}$ gilt: $|S - I| < \varepsilon$.

Hier heißt $f$ **Integrand** und $g$ **Belegungsfunktion** oder Integratorfunkton von $\int_a^b fdg$.

Aus den RS-Summen folgt im Fall $L = \mathbb{R}^d$ mit $f = (f_1,\ldots,f_d)$, $g = (g_1,\ldots,g_d)^T$:

$$\int_a^b fdg = \int_a^b (f_1,\ldots,f_d)d(g_1,\ldots,g_d)^T = \sum_{j=1}^{d} \int_a^b f_j dg_j,$$

falls die rechte Seite existiert, und im Fall $L = \mathbb{C}$ mit $f = f_1 + if_2$, $g = g_1 + ig_2$

$$\int_a^b fdg = \int_a^b (f_1 + if_2)d(g_1 + ig_2) = \int_a^b f_1dg_1 - \int_a^b f_2dg_2 + i\int_a^b f_2dg_1 + i\int_a^b f_1dg_2,$$

falls die rechte Seite existiert.

**Satz 4.4.** Ist $g$ auf [a,b] monoton wachsend, so gilt:

1. Für alle Zerlegungen $\mathcal{Z}$ von $[a,b]$ und alle zugehörigen Belegungen $B$ gilt

$$\underline{\sigma}(f,\mathcal{Z},g) \leq \sigma(f,\mathcal{Z},B,g) \leq \overline{\sigma}(f,\mathcal{Z},g).$$

2. $\int_a^b fdg$ existiert genau dann, wenn

$$\lim_{|\mathcal{Z}|\to 0}(\overline{\sigma}(f,\mathcal{Z},g) - \underline{\sigma}(f,\mathcal{Z},g)) = 0.$$

3. Aus der Existenz von $\int_a^b fdg$ folgt die des entsprechenden Darboux-Stieltjes-Integrals und dessen Gleichheit mit $\int_a^b fdg$.

## 4.2 Existenz des Integrals

**Satz 4.5.** (***Cauchysches Integrabilitätskriterium***)**:** Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to L$, $g : [a,b] \to L$ gegeben, wobei $L = \mathbb{C}$ oder $L = \mathbb{R}^d$. Es existiert $\int_a^b fdg$ genau dann, wenn für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}(\varepsilon)$ existiert, sodass für beliebige $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}' \supset \mathcal{Z}(\varepsilon)$ und RS-Summen $\sigma$, $\sigma$' von $f$ bezüglich $g$ zur $\mathcal{Z}$,$\mathcal{Z}'$, $|\sigma - \sigma'| < \varepsilon$ gilt.

**Beweis**
"$\Rightarrow$"
Existiert $I := \int_a^b fdg \in \mathbb{C}$, dann existiert laut der Definition für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}(\varepsilon)$ von $[a,b]$, so dass $\forall \mathcal{Z}, \mathcal{Z}' \supset \mathcal{Z}(\varepsilon)$ Verfeinerungen von $\mathcal{Z}(\varepsilon)$ und RS-Summen $S = \sigma(f,\mathcal{Z},B,g)$ und $S' = \sigma(f,\mathcal{Z}',B',g)$ von $f$ bezüglich $g$ zu $\mathcal{Z}$ bez. $\mathcal{Z}'$ gilt: $|S - I| < \varepsilon$ und $|S' - I| < \varepsilon$.
Dann haben wir insgesamt:

$$|S - S'| \leq |S - I| + |S' - I| < 2\varepsilon$$

"$\Leftarrow$"
Wähle $\varepsilon = \frac{1}{n}$ und sei $S_n = \sigma(f, \mathcal{Z}(\frac{1}{n}), B(\frac{1}{n}), g)$ eine RS-Summe von $f$ bezüglich $g$ zu $\mathcal{Z}(\frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}$.
Dann ist $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge. Das heißt:
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Man wähle $N = N(\varepsilon)$ mit $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $S$ eine beliebige RS-Summe bezüglich einer gemeinsamen Verfeinerung $\mathcal{Z}$ von $\mathcal{Z}(\frac{1}{n})$ und $\mathcal{Z}(\frac{1}{m})$, so gilt:

$$|S_n - S_m| \leq |S_n - S| + |S - S_m| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{N} < \varepsilon.$$

Das heißt: $\forall m, n \geq N$ gilt $|S_n - S_m| < \varepsilon$. Sei $I := \lim_{n\to\infty} S_n$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|S_{n_0} - I| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Ist $S$ eine beliebige RS-Summe von $f$ bezüglich $g$ zu einer Verfeinerung von $\mathcal{Z}(\frac{1}{n_0})$, so gilt nach der Definition von $\mathcal{Z}(\frac{1}{n_0})$

$$|S - I| \leq |S - S_{n_0}| + |S_{n_0} - I| < \frac{1}{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Insgesamt gilt, dass für beliebiges $\varepsilon > 0$, eine Zerlegung $\mathcal{Z}_\varepsilon := \mathcal{Z}(\frac{1}{n_0(\varepsilon)})$ von $[a,b]$ existiert, sodass für alle $\mathcal{Z} \supset \mathcal{Z}(\frac{1}{n_0(\varepsilon)})$ und für alle RS-Summen $S$ von $f$ bezüglich $g$ zu $\mathcal{Z}$ $|S - I| < \varepsilon$ gilt.
Und laut der Definition existiert $\int_a^b fdg$. ■

**Lemma 4.6.** (***Rechenregeln***)**:**

1.
$$\exists \int_a^b f dg \Longleftrightarrow \exists \int_a^b g df$$
In diesem Fall gilt die partielle Integrations-Formel:
$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

2. Das RS-Integral ist linear, dass heißt, wenn die Integrale $\int_a^b f_i dg$ und $\int_a^b f dg_i$ existieren $(i = 1, 2)$, dann existieren auch die folgenden Integrale, und es gilt
$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) dg = \lambda_1 \int_a^b f_1 dg + \lambda_2 \int_a^b f_2 dg,$$
$$\int_a^b f d(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 \int_a^b f dg_1 + \lambda_2 \int_a^b f dg_2.$$

3. Für $a < c < b$ gilt
$$\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg$$
wobei das linke Integral genau dann existiert, wenn die beiden rechtsstehenden Integrale existieren.

**Beweis** Beweis mit Cauchyschem Integrabilitätskriterium. ■

**Definition 4.7. (*Schwankung*):** $g : [a, b] \to L$ heißt auf $[a, b]$ **von beschränkter Variation**, oder $g \in BV([a, b])$, wenn gilt:
$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(g) := \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{j=1}^{k} \|g(t_j) - g(t_{j-1})\| < \infty,$$
wobei $\mathcal{Z}$ alle Zerlegungen $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$, $k \in \mathbb{N}$, von $[a, b]$ durchläuft. Hier bedeutet $\|\cdot\|$ die euklidische Norm.

**Lemma 4.8.** $g = (g_1, \ldots, g_d)^T \in BV([a, b]) \Longleftrightarrow g_j \in BV([a, b])\ \forall j = 1, \ldots, d.$

**Beweis** Für $j = 1, \ldots, d$ gilt:
$$\sum_{i=1}^{k} |g_j(t_i) - g_j(t_{i-1})| \le \sum_{i=1}^{k} \|g(t_i) - g(t_{i-1})\| \le \sum_{l=1}^{d} \sum_{i=1}^{k} |g_l(t_i) - g_l(t_{i-1})|$$
Diese Ungleichung zeigt die beiden Richtungen. ■

**Lemma 4.9.** Im Fall $d = 1$ gilt $g \in BV([a, b])$ genau dann, wenn sich $g$ darstellen lässt als
$$g(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) = (-\varphi_2(t)) - (-\varphi_1(t))$$
mit auf $[a, b]$ monoton steigenden Funktionen $\varphi_1$ und $\varphi_2$.

**Satz 4.10.** Seien $f : [a, b] \to L$, $g : [a, b] \to L$ gegeben mit $f \in C([a, b])$, $g \in BV([a, b])$.

Dann existiert das Riemann-Stieltjes-Integral von $f$ bezüglich $g$, also $\exists \int_a^b f(t)dg(t)$.

Im Falle $L = \mathbb{R}^d$ und $f = (f_1, \ldots, f_d)$, $g = (g_1, \ldots, g_d)^T$ gilt

$$\int_a^b f dg = \sum_{j=1}^d \int_a^b f_j dg_j,$$

wobei auch rechts alle Integrale existieren.

Im Falle $L = \mathbb{C}$ und $f = f_1 + if_2$, $g = g_1 + ig_2$ gilt

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f_1 dg_1 - \int_a^b f_2 dg_2 + i \int_a^b f_2 dg_1 + i \int_a^b f_1 dg_2,$$

wobei auch rechts alle Integrale existieren.

Allgemein gilt:

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \int_a^b \|f(t)\| d\overset{t}{\underset{a}{V}}(g) \leq K \overset{b}{\underset{a}{V}}(g),$$

wobei $\forall t \in [a, b]$, $\|f(t)\| \leq K$.

**Beweis** Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2(1+\overset{b}{\underset{a}{V}}(g))}$. $f$ ist stetig auf einem kompakten Intervall $[a, b]$, also folgt nach einem Satz aus der Analysis 1, dass $f$ gleichmäßig stetig auf dem Intervall $[a, b]$ ist. Das heißt, für beliebiges $\tilde{\varepsilon} > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$ $\|f(x) - f(y)\| < \tilde{\varepsilon}$ gilt. Wähle $\mathcal{Z}(\varepsilon) : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ mit $t_\nu - t_{\nu-1} < \delta$, $\nu = 1, \ldots, k$ und sei

$$S(\varepsilon) := \sum_{\nu=1}^k f(t_\nu) \cdot \big(g(t_\nu) - g(t_{\nu-1})\big).$$

Seien $S, S'$ RS-Summen von $f$ bezüglich g nach Verfeinerungen $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}'$ von $\mathcal{Z}(\varepsilon)$, dann lässt sich die RS-Summe S darstellen als

$$S = \sum_{\nu=1}^k \sum_{\mu=1}^{r_\nu} f(\tau_\mu^{(\nu)}) \cdot \big(g(t_\mu^{(\nu)}) - g(t_{\mu-1}^{(\nu)})\big)$$

mit

$$t_{\nu-1} = t_0^{(\nu)} < t_1^{(\nu)} < \cdots < t_{r_\nu}^{(\nu)} = t_\nu, \quad t_{\mu-1}^{(\nu)} \leq \tau_\mu^{(\nu)} \leq t_\mu^{(\nu)},$$

$\mu = 1, \ldots, r_\nu$, $\nu = 1, \ldots, k$. Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} |S - S(\varepsilon)| &\leq \sum_{\nu=1}^k \sum_{\mu=1}^{r_\nu} \|f(\tau_\mu^{(\nu)}) - f(t_\nu)\| \cdot \|g(t_\mu^{(\nu)}) - g(t_{\mu-1}^{(\nu)})\| \\ &\leq \tilde{\varepsilon} \sum_{\nu=1}^k \sum_{\mu=1}^{r_\nu} \|g(t_\mu^{(\nu)}) - g(t_{\mu-1}^{(\nu)})\| \leq \tilde{\varepsilon} \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Analog gilt: $|S' - S(\varepsilon)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt insgesamt $|S - S'| < \varepsilon$. Aus dem Satz 4.5. folgt die Existenz von $\int_a^b f dg$ und analog aller Integrale $\int_a^b f_j dg_j$, $j = 1, \ldots, d$, falls $L = \mathbb{R}^d$, bzw. $\int_a^b f_\nu dg_\mu$,

$\nu, \mu = 0, 1$, falls $L = \mathbb{C}$. Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\nu=1}^{k} f(\tau_\nu)\big(g(t_\nu) - g(t_{\nu-1})\big)\right| &\leq \sum_{\nu=1}^{k} \|f(\tau_\nu)\| \cdot \|g(t_\nu) - g(t_{\nu-1})\| \\
\leq \sum_{\nu=1}^{k} \|f(\tau_\nu)\| \underset{t_{\nu-1}}{\overset{t_\nu}{V}}(g) &= \sum_{\nu=1}^{k} \|f(\tau_\nu)\| \Big(\underset{a}{\overset{t_\nu}{V}}(g) - \underset{a}{\overset{t_{\nu-1}}{V}}(g)\Big)
\end{aligned}$$

gilt die obige Abschätzung für jede Riemann-Stieltjes-Summe. ■

Für den eindimensionalen Fall gilt die folgende Aussage:

**Satz 4.11.** Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Ist $f \in C(I)$ und $g \in BV(I)$, so existiert das Integral $\int_a^b f dg$, und es besteht die Abschätzung

$$\left|\int_a^b f dg\right| \leq \|f\|_\infty \cdot \underset{a}{\overset{b}{V}}(g).$$

**Beweis** $f$ ist auf einem kompakten Intervall $I$ stetig, und gemäß des Satzes aus der Analysis 1 ist $f$ auf $I$ gleichmäßig stetig. Also es gilt: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ mit $|s - t| < \delta$. Wähle eine Zerlegung $\mathcal{Z}(\varepsilon) = (r_0, \ldots, r_q)$ mit $|\mathcal{Z}(\varepsilon)| < \delta$ und eine zugehörige RS-Summe $\sigma(f, \mathcal{Z}(\varepsilon), \rho, g)$, etwa mit $\rho_i = r_i$. Nun sei $\mathcal{Z} = (t_0, \ldots, t_p)$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}(\varepsilon)$, und es sei etwa $t_m = r_1$. Der erste Summand von $\sigma(f, \mathcal{Z}(\varepsilon), \rho, g)$ lässt sich in der Form

$$f(r_1)\big(g(r_1) - g(r_0)\big) = \sum_{i=1}^{m} f(r_1)\big(g(t_i) - g(t_{i-1})\big)$$

schreiben.
Da die ersten $m$ Zwischenstellen $\tau_i$ von $\sigma(f, \mathcal{Z}, \tau, g)$ in $[a, r_1]$ liegen und da $r_1 - a < \delta$ ist, gilt $|f(\tau_i) - f(r_1)| < \varepsilon$. Deshalb erhält man für die Differenz zwischen dem ersten Glied von $\sigma(f, \mathcal{Z}(\varepsilon), \rho, g)$ und den ersten $m$ Gliedern von $\sigma(f, \mathcal{Z}, \tau, g)$ die Abschätzung

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \big(f(r_1) - f(\tau_i)\big)\big(g(t_i) - g(t_{i-1})\big)\right| \leq \varepsilon \underset{a}{\overset{r_1}{V}}(g).$$

Verfährt man mit den Teilintervallen $[r_1, r_2]$,...,$[r_{q-1}, r_q]$ entsprechend, so ergibt sich

$$|\sigma(f, \mathcal{Z}, \tau, g) - \sigma(f, \mathcal{Z}(\varepsilon), \rho, g)| \leq \varepsilon \underset{a}{\overset{b}{V}}(g).$$

Für beliebige Zerlegungen $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}' \supset \mathcal{Z}(\varepsilon)$ ist dann

$$\begin{aligned}
|\sigma(f, \mathcal{Z}, \tau, g) - \sigma(f, \mathcal{Z}', \tau', g)| &\leq |\sigma(f, \mathcal{Z}, \tau, g) - \sigma(f, \mathcal{Z}(\varepsilon), \rho, g)| \\
&+ |\sigma(f, \mathcal{Z}', \tau', g) - \sigma(f, \mathcal{Z}(\varepsilon), \rho, g)| \\
&\leq 2\varepsilon \underset{a}{\overset{b}{V}}(g)
\end{aligned}$$

Also ist $(\sigma(f, \mathcal{Z}, \tau, g))$ ein Cauchy-Netz, und $\int_a^b f dg$ existiert. Eine einfache Abschätzung:

$$|\sigma(f, \mathcal{Z}, \tau, g)| \leq \|f\|_\infty \cdot \sum |g(t_i) - g(t_{i-1})| \leq \|f\|_\infty \cdot \underset{a}{\overset{b}{V}}(g).$$

ergibt die behauptete Ungleichung. ■

## 4.3 Weitere Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals

**Satz 4.12.** (***Transformation in ein Riemann-Integral***)**:** Sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und sei $g \in C^1(I)$, also auf dem kompakten $I$ stetig differenzierbar. Dann existiert $\int_a^b f dg$, und in diesem Fall gilt:

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f g' dt.$$

**Beweis** Da $f$ Riemann-integrierbar ist, ist $f$ auf $I$ beschränkt: $\exists K > 0 : |f| \leq K$.

Da $g \in C^1(I)$, also stetig differenzierbar ist, ist $g' \in C(I)$, dann gilt auch, dass $g'$ auf dem kompakten Intervall $I$ gleichmäßig stetig ist. Das kann man mit dem $\varepsilon - \delta$-Kriterium argumentieren: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $|g'(\tau) - g'(\tau')| < \varepsilon$ mit $|\tau - \tau'| < \delta$.

Sei $|\mathcal{Z}| < \delta$. Nach dem Mittelwertsatz kann man $\sigma(f, \mathcal{Z}, \tau, g)$ in der Form

$$\sigma(f, \mathcal{Z}, \tau, g) = \sum_{i=1}^{k} f(\tau_i)\big(g(t_i) - g(t_{i-1})\big) = \sum_{i=1}^{k} f(\tau_i) g'(\tau_i')(t_i - t_{i-1})$$

schreiben, wobei $\tau_i' \in [t_{i-1}, t_i]$ ist.

Vergleiche man dies mit der Zwischensumme

$$\overset{\circ}{\sigma}(fg', \mathcal{Z}, \tau) = \sum_{i=1}^{k} f(\tau_i) g'(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$$

zum Integral $\int_a^b f g' dt$:

$$|\sigma - \overset{\circ}{\sigma}| = \sum_{i=1}^{k} f(\tau_i)(g'(\tau_i') - g'(\tau_i))(t_i - t_{i-1}) \leq K \sum_{i=1}^{k} \underbrace{|g'(\tau_i') - g'(\tau_i)|}_{<\varepsilon} \cdot (t_i - t_{i-1}) \leq K\varepsilon(b-a).$$

Da diese Ungleichung für alle Zerlegungen mit $|\mathcal{Z}| < \delta$ gilt, also insbesondere für alle Verfeinerungen einer fest gewählten solchen Zerlegung, sind die beiden Integrale gleich. ■

**Lemma 4.13.** Jedes Integral $\int_a^b f h dt$ lässt sich als RS-Integral

$$\int_a^b f(t)h(t)dt = \int_a^b f(t)dg(t), \quad \text{mit} \quad g(t) = \int_a^t h(s)ds$$

schreiben, falls $f$ Riemann-integrierbar und $h$ stetig ist.

Hat $g$ an $c \in [a,b]$ eine Sprungstelle mit Sprunghöhe $\alpha$, so ist $g - \alpha \mathbb{1}_{(c,\infty)}$ an $c$ stetig.

**Satz 4.14.** Ist $f$ über $[a,b]$ Riemann-integrierbar und $g$ auf $[a,b]$ mit Ausnahme endlich vieler Stetigkeits-oder Sprungstellen $c_1, \cdots, c_n$ differenzierbar und gilt $\int_a^b |g'(x)|dx < \infty$, so folgt

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(c_j),$$

wobei $\alpha_j$ die Sprunghöhe von $g$ an $c_j$ ist.

**Beispiel 4.15.**

$$\int_{-2}^{2} x dg(x) \quad \text{mit} \quad g(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \leq x \leq -1 \\ 2 & -1 < x < 0 \\ x^2 - 3 & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

1.Methode: Teilung des Intervalls an den Sprungstellen von $g$. (Sprunghöhen: jeweils 1 bzw. -5)

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} x dg(x) &= \int_{-2}^{-1} xd(x+2) + \int_{-1}^{0} xd2 + \int_{0}^{2} xd(x^2-3) + 1(-1) + (-5)\cdot 0 \\ &= \int_{-2}^{-1} xdx + 0 + 2\int_{0}^{2} x^2 dx - 1 = \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{-1} + 2\cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{2} - 1 \\ &= \frac{1}{2} - 2 + 2\cdot\frac{8}{3} - 1 = \frac{17}{6} \end{aligned}$$

2.Methode: Partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} x dg(x) &= x\cdot g(x)\Big|_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2} g(x)dx \\ &= \Big(2\cdot(2^2-3) - (-2)(-2+2)\Big) - \int_{-2}^{-1}(x+2)dx - \int_{-1}^{0} 2dx - \int_{0}^{2}(x^2-3)dx \\ &= (2-0) - \Big(\frac{x^2}{2} + 2x\Big)\Big|_{-2}^{-1} - 2x\Big|_{-1}^{0} - (\frac{x^3}{3} - 3x)\Big|_{0}^{2} \\ &= 2 - (\frac{1}{2} - 2 - 2 + 4) - 2(1) - (\frac{8}{3} - 6) = \frac{17}{6} \end{aligned}$$

Für den mehrdimensionalen Fall gilt:

**Satz 4.16.** Sei $G \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein Gebiet und seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $g : G \to \mathbb{R}^m$, $h : [a,b] \to G$ gegeben mit

$$f \in C([a,b]), g \in C^1(G), h \in C([a,b]) \quad \text{und} \quad h \in BV([a,b]).$$

Dann gilt: $g \circ h \in BV([a,b])$ und mit $g' \in \mathbb{R}^{m\times d}$ existiert das Integral von $f$ bezüglich $g \circ f$ und es gilt

$$\int_a^b f(t)dg(h(t)) = \int_a^b f(t)g'(h(t))dh(t).$$

**Beweis** Sei zunächst $m = 1$ und $h = (h_1, \cdots, h_d)^T$.

1. Es ist $C := \{h(t) : t \in [a,b]\}$ kompakt, also $\rho := \text{dist}(C, \partial G) > 0$ und $M := \{x \in G: \text{dist}(x, C) \leq \frac{\rho}{2}\}$ kompakt.

   Da $h$ auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig ist, gilt: $\exists \eta_0 > 0 : \forall t,t' \in [a,b], |t-t'| < \eta_0$ gilt $\|h(t) - h(t')\| < \frac{\rho}{2}$.

Sei $\mathcal{Z} : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit $t_\nu - t_{\nu-1} < \eta_0$, $\nu = 1, \ldots, k$. Für diese $\nu$ ist die geradlinige Strecke $[h(t_{\nu-1}), h(t_\nu)] \subset M$. Für $\nu = 1, \ldots, k$ gilt gemäß Mittelwertsatz, dass es ein $y_\nu \in [h(t_{\nu-1}), h(t_\nu)]$ existiert mit

$$g(h(t_\nu)) - g(h(t_{\nu-1})) = \sum_{j=1}^{d} g_{x_j}(y_\nu)(h_j(t_\nu) - h_j(t_{\nu-1})) = \text{grad}g(y_\nu) \cdot (h(t_\nu) - h(t_{\nu-1})).$$

Mit $\|\text{grad}g(x)\| \leq K = K(M)$, $\forall x \in M$ und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt:

$$|g(h(t_\nu)) - g(h(t_{\nu-1}))| \leq K\|h(t_\nu) - h(t_{\nu-1})\|.$$

Wegen der Dreiecksungleichung kann jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$ o.B.d.A. so fein angenommen werden, dass $\mu(\mathcal{Z}) := \max_{\nu=1,\ldots,k}(t_\nu - t_{\nu-1}) < \eta_0$ gilt. Daraus folgt:

$$\sum_{\nu=1}^{k} |g(h(t_\nu)) - g(h(t_{\nu-1}))| \leq K \sum_{\nu=1}^{k} \|h(t_\nu) - h(t_{\nu-1})\| \leq K \overset{b}{\underset{a}{V}}(h),$$

also gilt:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(g(h)) \leq K \overset{b}{\underset{a}{V}}(h).$$

2. Gemäß 1. und Satz 4.10. existieren alle obigen Integrale. Es ist nur noch die Gleichheit zu beweisen. Mit Definition des RS-Integral existiert eine Folge von Zerlegungen :

$$\mathcal{Z}_n : a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{k(n)}^{(n)} = b$$

und

$$\tau_\nu^{(n)} \in [t_{\nu-1}^{(n)}, t_\nu^{(n)}] \quad \text{mit} \quad \mu(\mathcal{Z}_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

und

$$S_n := \sum_{\nu=1}^{k(n)} f(\tau_\nu^{(n)})\big(g(h(t_\nu^{(n)})) - g(h(t_{\nu-1}^{(n)}))\big) \to \int_a^b f(t) dg(h(t)) \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

und

$$T_n := \sum_{j=1}^{d} \sum_{\nu=1}^{k(n)} f(\tau_\nu^{(n)}) g_{x_j}\big(h(\tau_\nu^{(n)})\big)\big(h_j(t_\nu^{(n)}) - h_j(t_{\nu-1}^{(n)})\big) \to \sum_{j=1}^{d} \int_a^b f(t) g_{x_j}\big(h(t)\big) dh_j(t)$$

für $n \to \infty$.

Es genügt also, zu zeigen, dass $S_n - T_n \to 0$ für $n \to \infty$.

3. Da $\mu(Z_n) \to 0$ für $n \to \infty$, folgt mit den Bezeichnungen aus 1.: $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0$ $\mu(\mathcal{Z}_n) \leq \eta_0$, folgt:

$\forall n \geq N_0$ und für $\nu = 1, \ldots, k(n)$ ist die geradlinige Strecke $[h(t_{\nu-1}^{(n)}), h(t_\nu^{(n)})] \subset M$.

$\forall n \geq N_0$ und für $\nu = 1, \ldots, k(n)$ existiert gemäß Mittelwertsatz ein $y_\nu^{(n)} \in [h(t_{\nu-1}^{(n)}), h(t_\nu^{(n)})]$ mit

$$g(h(t_\nu^{(n)})) - g(h(t_{\nu-1}^{(n)})) = \sum_{j=1}^{d} g_{x_j}(y_\nu^{(n)})(h_j(t_\nu^{(n)}) - h_j(t_{\nu-1}^{(n)})).$$

Daraus folgt :

$$S_n - T_n = \sum_{j=1}^{d} \sum_{\nu=1}^{k(n)} f(\tau_\nu^{(n)})(g_{x_j}(y_\nu^{(n)}) - g_{x_j}(h(\tau_\nu^{(n)})))(h_j(t_\nu^{(n)}) - h_j(t_{\nu-1}^{(n)})).$$

Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $h$ folgt:

$$\max_\nu \|y_\nu^{(n)} - h(\tau_\nu^{(n)})\| \le \max_\nu \|y_\nu^{(n)} - h(t_\nu^{(n)})\| + \max_\nu \|h(t_\nu^{(n)}) - h(\tau_\nu^{(n)})| \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $g_{x_j}$ auf $M$, $j = 1, \dots, d$ folgt für $n \to \infty$

$$\varepsilon_j^{(n)} := \max_\nu |g_{x_j}(y_\nu^{(n)}) - g_{x_j}(h(\tau_\nu^{(n)}))| \to 0.$$

Dann gilt für $n \to \infty$

$$|S_n - T_n| \le \sum_{j=1}^{d} \sum_{\nu=1}^{k(n)} (\max_{[a,b]} |f|)\varepsilon_j^{(n)} |h_j(\tau_\nu^{(n)}) - h_j(\tau_{\nu-1}^{(n)})| \le (\max_{[a,b]} |f|) \sum_{j=1}^{d} \varepsilon_j^{(n)} \overset{b}{\underset{a}{V}}(h_j) \to 0.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)dg(h(t)) &= \sum_{j=1}^{d} \int_a^b f(t)g_{x_j}(h(t))dh_j(t) \\ &= \int_a^b f(t)\mathrm{grad}g(h(t))dh(t) = \int_a^b f(t)g'(h(t))dh(t) \end{aligned}$$

bewiesen.

4. Für $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, gilt $g_\nu \circ h \in BV([a,b])$ und die eben bewiesene Formel für jede Komponente $g_\nu, f_\nu, \nu = 1, \dots, m$ von $g$ bzw. $f$. Daraus folgt $g \circ h \in BV([a,b])$ und

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)dg(h(t)) &= \sum_{\nu=1}^{m} \int_a^b f_\nu(t)dg_\nu(h(t)) = \sum_{\nu=1}^{m} \int_a^b f_\nu(t)g_\nu'(h(t))dh(t) \\ &= \int_a^b \sum_{\nu=1}^{m} f_\nu(t)g_\nu'(h(t))dh(t) = \int_a^b f(t)g'(h(t))dh(t). \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. ■

**Satz 4.17.** Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, $g : G \to \mathbb{C}$, $h : [a,b] \to G$ gegeben mit $f \in C([a,b])$, $g \in H(G)$, $g' \in C(G)$, $h \in C([a,b])$ und $h \in BV([a,b])$. Dann existiert das Integral von $f$ bezüglich $g \circ h$ und es gilt

$$\int_a^b f(t)dg(h(t)) = \int_a^b f(t)g'(h(t))dh(t).$$

**Beweis** Wegen der Linearität des Integrals sei o.B.d.A. $f$ reellwertig. Mit $g = g_1 + ig_2$ und $h = h_1 + ih_2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)dg(h(t)) &\overset{Lin.}{=} \int_a^b f(t)dg_1(h(t)) + i\int_a^b f(t)dg_2(h(t)) \\
&\overset{4.16.}{=} \int_a^b f(t)g_{1x}(h(t))dh_1(t) + \int_a^b f(t)g_{1y}(h(t))dh_2(h) \\
&+ i\Big(\int_a^b f(t)g_{2x}(h(t))dh_1(t) + \int_a^b f(t)g_{2y}(h(t))dh_2(t)\Big).
\end{aligned}$$

Mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $g_{1y} = -g_{2x}$ und $g_{2y} = g_{1x}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)dg(h(t)) &= \int_a^b f(t)(g_{1x}(h(t)) + ig_{2x}(h(t)))d(h_1(t) + ih_2(t)) \\
&= \int_a^b f(t)g'(h(t))dh(t).
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. ■

**Satz 4.18.** Seien $f : [a,b] \to L$, $g : [a,b] \to L$ ($L = \mathbb{C}$ oder $L = \mathbb{R}^d$) gegeben mit $f \in C([a,b])$ und $g \in C^1([a,b])$. Dann existiert das Integral von $f$ bezüglich $g$ und es gilt

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

**Beweis**

1. Falls $L = \mathbb{R}$, so setze man $g$ stetig differenzierbar fort auf $\mathbb{R}$. Mit $h := id_{[a,b]}$ folgt die Behauptung aus 4.16. mit $m = d = 1$.

2. Falls $L = R^d, d > 1$, so ist mit $f = (f_1, \dots, f_d)$, $g = (g_1, \dots, g_d)^T$

$$\int_a^b f(t)g(t) = \sum_{j=1}^{d} \int_a^b f_j(t)dg_j(t) = \sum_{j=1}^{d} \int_a^b f_j(t)g_j'(t)dt = \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

3. Falls $L = \mathbb{C}$, so sei wegen der Linearität des Integrals oBdA $f$ reellwertig. Mit $g = g_1 + ig_2$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)dg(t) &= \int_a^b f(t)dg_1(t) + i\int_a^b f(t)dg_2(t) \\
&= \int_a^b f(t)g_1'(t)dt + i\int_a^b f(t)g_2'(t)dt = \int_a^b f(t)g'(t)dt.
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. ■

### 4.4 Mittelwertsätze für Riemann-Stieltjes-Integrale

Ist $g$ wachsend, so sind die in den RS-Summen auftretenden $g$-Differenzen nichtnegativ. Aus $f_1 < f_2$ folgt also $\sigma(f_1, \mathcal{Z}, g) < \sigma(f_2, \mathcal{Z}, g)$ und eine entsprechende Ungleichung für die Integrale. Wendet man dieses Ergebnis auf die Ungleichungen $\inf f(I) \leq f(t) \leq \sup f(I)$ an, so ergibt sich ein

**Satz 4.19. (*Erster Mittelwertsatz*):** Existiert $\int_a^b f dg$ und ist $g$ in $I = [a, b]$ wachsend, so ist

$$\int_a^b f dg = \mu \int_a^b dg = \mu\big(g(b) - g(a)\big) \quad \text{mit} \quad \inf f(I) \leq \mu \leq \sup f(I)$$

Ist $f$ stetig, so gibt es ein $\xi \in I$ mit $\mu = f(\xi)$.

**Satz 4.20. (*Zweiter Mittelwertsatz*):** Die Funktion $f$ sei im Intervall $I = [a, b]$ monoton, und $g$ sei stetig in $I$. Dann existiert das Integral $\int_a^b f dg$, und es gibt ein $c \in I$ mit

$$\int_a^b f dg = f(a) \int_a^c dg + f(b) \int_c^b dg = f(a)\big(g(c) - g(a)\big) + f(b)\big(g(b) - g(c)\big).$$

**Beweis** Man kann annehmen, dass $f$ wachsend ist. Das Integral $\int_a^b g df$ existiert. Nach dem ersten Mittelwertsatz hat es den Wert $g(c)\big(f(b) - f(a)\big)$ mit $c \in I$. Nach dem Satz über partielle Integration existiert das Integral $\int_a^b f dg$, und es gilt

$$\int_a^b f dg = fg|_a^b - \int_a^b g df = f(b)g(b) - f(a)g(a) - g(c)(f(b) - f(a)).$$

Das ist gerade die behauptete Gleichung. ■

## 5 Anwendungen

### 5.1 Funktionalanalysis

Wie erwähnt spielt das Riemann-Stieltjes-Integral eine wichtige Rolle in der Funktionalanalysis.

**Satz 5.1. (*Darstellungssatz von Riesz*):** Sei $\ell \in (C[0, 1])'$ und $L$ eine Hahn-Banach-Fortsetzung zu einem Funktional $L \in (\ell^\infty[0, 1])'$. Setze $y_t = \mathbb{1}_{[0,t]} \in \ell^\infty[0, 1]$. Dann gilt: $C[0, 1] \subset \overline{\text{lin}}\{y_t : t \in [0, 1]\}$. Setze $g(t) = L(y_t)$, dann ist $g$ von beschränkter Variation und das Funktonal $\ell$ hat die Darstellung

$$\ell(x) = \int_0^1 x(t) dg(t), \qquad \forall x \in C[0, 1]$$

als Stieltjes-Integral.

### 5.2 Maß-und Wahrscheinlichkeitstheorie

Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ein Messraum. Sei $X : (\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}) : \omega \mapsto x$ eine reellwertige Zufallsvariable. So ist $\mathbb{P}X^{-1}$ das durch $X$ induzierte Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen $X$ in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ ist, im Fall der Existenz, definiert als

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X d\mathbb{P}.$$

Laut dem Transformationssatz bekommt man

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_\Omega X(\omega) d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} x d\mathbb{P}X^{-1}.$$

Sei $F_X$ die zu dem Maß $\mathbb{P}X^{-1}$ gehörigen Verteilungsfunktion und sei $F_x$ stetig differenzierbar. Dann stimmen wegen der Existenz des Integrals in beiden Sinnen das Lebesgue-Integral und das Riemann-Stieltjes-Integral überein, und es gilt:

$$\int_\mathbb{R} x d\mathbb{P}X^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx.$$

Also man kann den Erwartungswert mit dem Riemann-Stieltjes-Integral, als auch mit dem Riemann-Integral berechnen.

### 5.3 Naturwissenschaft

Man kann mit dem Riemann-Stieltjes-Integral eine physikalische Vorstellung verbinden. Man denke sich das Intervall $[0, 1]$ mit punktförmig oder kontinuerlich verteilter Masse belegt. Bezeichnet $g(t)$ die im Intervall $[0, t]$ enthaltene Masse, so entspricht der $g-$Differenz $g(t_i) - g(t_{i-1})$ die Masse im Teilintervall $[t_{t-1}, t_i]$. Es lassen sich dann die Gesamtmasse $M$ und der Schwerpunkt $S$ dieser eindimensionalen Massenverteilung in einheitlicher Form

$$M = \int_0^1 dg, \qquad S = \frac{1}{M} \cdot \int_0^1 t dg$$

angeben, während bisher die Sonderfälle von Massenpunkten bzw. kontinuierlich verteilten Massen gesondert durch endliche Summen bzw. Riemannsche Integrale beschrieben wurden.

## 6 Ausblick

In der Finanzmathematik brauchen wir die Integration nach dem Pfad einer Brownschen Bewegung:

$$\int_0^T f(t) dB_t(\omega).$$

Das heißt, wir wollen die Funktion $g$ durch den Pfad einer Brownschen Bewegung ersetzen.

## 6.1 Integration nach einer Brownschen Bewegung

Wir bezeichnen $B = (B_t, t \geq 0)$ als Brownsche Bewegung. Wir haben gelernt, dass die Pfade einer Brownschen Bewegung von unbeschränkter Variation auf $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$ sind, das heißt:

$$\sup \sum_{k=0}^{n} |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}| = \infty, \quad P - f.s.,$$

wobei das Spremum über alle Zerlegungen von $[a, b]$ gebildet wird. Man kann daher, selbst für stetige Funktionen $f$, ein Integral $\int_a^b f(t) dB_t$ nicht als Riemann-Stieltjes-Integral definieren.

Aber die beschränkte Variation von $g$ ist nicht notwendig für die Existenz des Riemann-Stieltjes-Integral $\int_a^b f(t)dg(t)$. Einige schwächeren Bedingungen für die Existenz von $\int_a^b f(t)dg(t)$ sind nicht so bekannt, aber sie wurden schon gefunden.

**Definition 6.1.** Eine reellwertige Funktion $f$ heißt auf $[a, b]$ **von beschränkter p-Variation** für ein $p > 0$, wenn gilt:

$$\sup_{\tau} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p < \infty,$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen $\tau$ von $[a, b]$ gebildet wird.

Im Fall $p = 1$ ist die Funktion $f$ von beschränkter Variation.

**Satz 6.2.** Das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_a^b f(t)dg(t)$ existiert, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. die Funktionen $f$ und $g$ haben keine gemeinsamen Unstetigkeitsstellen
2. die Funktion $f$ ist von beschränkter $p$-Variation und die Funktion $g$ ist von beschränkter $q$-Variation für $p, q > 0$ mit $p^{-1} + q^{-1} > 1$

Die Pfade einer Brownschen Bewegung $(B_t)_{t \geq 0}$ sind von beschränkter $p$-Variation für $p \geq 2$ und von unbeschränkter $p$-Variation für $p < 2$.

Sei $f(t)$ eine deterministische Funktion auf $[0, T]$ oder ein Pfad einer stochastischen Prozesses $f(t, \omega)$. Sei $f$ von beschränkter Variation mit der beschränkten Ableitungsfunktion $f'(t)$. Dann kann man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwenden:

$$|f(t) - f(s)| \leq K(t - s), \quad s < t,$$

wobei $K > 0$ eine von $f$ abhängige Konstante ist. Dann gilt

$$\sup_{\tau} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq K \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = K < \infty.$$

Also ist $f$ von beschränkter Variation. Mit dem obigen Satz können wir das Riemann-Stieljes-Integral $\int_0^T f(t)dB_t(\omega)$ definieren.

**Satz 6.3.** Sei $f$ eine deterministische Funktion oder ein Pfad eines stochastischen Prozesses. Sei $f$ differenzierbar mit einer beschränkten Ableitungsfunktion auf $[0,T]$. Dann existiert das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_0^T f(t)dB_t(\omega)$ für jeden Pfad der Brownschen Bewegung $B_t(\omega)$.

Wir können zum Beispiel die Integrale

$$\int_0^T e^t dB_t(\omega), \quad \int_0^T sin(t)dB_t(\omega), \quad \int_0^T t^p dB_t(\omega), \quad p \geq 0,$$

als Riemann-Stieltjes-Integral definieren.

Es ist im Allgemeinen falsch, dass man $\int_0^T f(t)dB_t(\omega)$ für jeden Integrand $f$ als ein Riemann-Stieljes-Integral nach einem Pfad einer Brownschen Bewegung definieren kann.

Aber unser Ziel ist, die Integrale $\int_0^T f(t,B_t)dB_t(\omega)$ für alle stetigen deterministischen Funktionen auf $[0,T]$ zu definieren. Mit der Theorie des Riemann-Stieltjes-Integrals kann man dieses Ziel nicht erreichen, weil die Pfade der Brownschen Bewegung von unbeschränkter Variation auf allen Intervallen sind. Deswegen brauchen wir eine andere bessere Integrationstheorie, das Itô-Stratonovic-Integral.

## 6.2 Beispiel

Sei $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ und $e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}$ Zufallsvariablen. Sei

$$\varphi(t,\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} e_j(\omega)\mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1})}(t), \quad t \geq 0, \quad \omega \in \Omega$$

Man versucht das Integral mit dem Riemann-Stieltjes-Integrationsbegriff zu definieren:

$$\int_0^T \varphi(t,\omega)dB_t(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} e_j(\omega)(B_{t_{j+1}\wedge T}(\omega) - B_{t_j\wedge T}(\omega))$$

Als Approximation von $(t,\omega) \mapsto B_t(\omega)$ betrachten wir

$$\varphi_1(t,\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_j}(\omega)\mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1})}(t) \quad \text{und} \quad \varphi_2(t,\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_{j+1}}(\omega)\mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1})}(t).$$

Dann gilt

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T \varphi_1(t)dB_t\Big] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[B_{t_j}\underbrace{(B_{t_{j+1}\wedge T} - B_{t_j\wedge T})}_{\text{unabhängig von} B_{t_j}}] = \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\mathbb{E}[B_{t_j}]}_{=0}\mathbb{E}[(B_{t_{j+1}\wedge T} - B_{t_j\wedge T})] = 0$$

und durch die Umformung $B_{t_{j+1}} = B_{t_j\wedge T} + (B_{t_{j+1}\wedge T} - B_{t_j\wedge T}) + (B_{t_{j+1}} - B_{t_{j+1}\wedge T})$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\int_0^T \varphi_2(t)dB_t\Big] &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[B_{t_{j+1}}(B_{t_{j+1}\wedge T} - B_{t_j\wedge T})] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[\underbrace{(B_{t_j\wedge T} + (B_{t_{j+1}\wedge T} - B_{t_j\wedge T}) + (B_{t_{j+1}} - B_{t_{j+1}\wedge T}))}_{\text{unabhängige Zuwächse}}(B_{t_{j+1}\wedge T} - B_{t_j\wedge T})] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[(B_{t_{j+1}\wedge T} - B_{t_j\wedge T})^2] = \sum_{j=0}^{n-1}(t_{j+1}\wedge T - t_j \wedge T) = t_n \wedge T
\end{aligned}$$

Dies gilt für jedes $n$ und jede Wahl von $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$.

Es kann eine Version der Brownschen Bewegung gewählt werden, so dass alle Pfade stetig sind, also in $[0, T]$ gleichmäßig stetig. Für $k \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$ sei

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,k}(t,\omega) &= \sum_{j=0}^{2^k-1} B_{\frac{jT}{2^k}}(\omega) \mathbb{1}_{\left[\frac{jT}{2^k}, \frac{(j+1)T}{2^k}\right)}(t) \\
\varphi_{2,k}(t,\omega) &= \sum_{j=0}^{2^k-1} B_{\frac{(j+1)T}{2^k}}(\omega) \mathbb{1}_{\left[\frac{jT}{2^k}, \frac{(j+1)T}{2^k}\right)}(t).
\end{aligned}$$

Dann gilt $\forall i \in \{1, 2\}$, $\omega \in \Omega$

$$\sup_{t \in [0,T)} |B_t(\omega) - \varphi_{i,k}(t,\omega)| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Die Approximation von

$$\int_0^T f(t,\omega) dB_t(\omega) \quad \text{durch} \quad \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j^*, \omega)(B_{t_{j+1} \wedge T}(\omega) - B_{t_j \wedge T}(\omega)) \quad \text{mit} \quad t_j^* \in [t_j, t_{j+1}]$$

ist von der Wahl von $t^*$ abhängig:

1. Die Wahl $t_j^* = t_j$ (linker Randpunkt) führt zum **Itô-Integral**.
2. Die Wahl $t_j^* = \frac{t_j + t_{j+1}}{2}$ (Intervallmittelpunkt) führt zum **Stratonovic-Integral**.

Ist $t_j^* > t_j$, so ist (für $T > t_{j+1}$) $B_{t_j}^*$ nicht unabhängig vom Zuwachs $B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$, enthält also Informationen über den Zuwachs.

## Literatur


[AE] Amann, Escher: **Analysis 2**, Birkhäuser-Verlag, Basel. Boston. Berlin, 2006

[B] Bauer: **Wahrscheinlichkeitstheorie**, de Gruyter, Berlin. New York, 1991

[MI] Mikosch: **Elementary stochastic calculus**, World Scientific, Beijing. Singapore, 2006

[M] Mlitz: **Analysis 2**, Vorlesungsskriptum, Wien, 2006

[R] Rudin: **Analysis**, Oldenbourg-Verlag, München. Wien, 2005

[RU] Runckel: **Höhere Analysis**, Oldenbourg-Verlag, München. Wien, 2000

[W] Walter: **Analysis 1,2**, Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg. New York, 1995