

CAPM-Capital Asset Pricing Model und das Markowitzmodell (zur Bestimmung optimaler Aktienportfolios)

Sigrid Dannbauer

18. Januar 2009



Angenommen man kauft ein Asset zum Zeitpunkt 0 und 1 Jahr später wird es verkauft. Der „total return“ dieser Investition ist dann definiert als:

total return

$$\text{total return} = \frac{\text{amount received}}{\text{amount invested}}$$

total return: Gesamtertrag, Gesamtgewinn

amount: Betrag/Summe

in Zeichen:

$$R = \frac{X_1}{X_0}$$



rate of return

Der Wert des Returns (Rate of Return) =
 $\frac{\text{amount received} - \text{amount invested}}{\text{amount invested}}$

$$r = \frac{X_1 - X_0}{X_0}$$

rate of return: Ertrag, Rendite

Es besteht folgender klar ersichtlicher Zusammenhang:

$$R = 1 + r$$



Short Sales

SHORT SALES

Ein Anleger verkauft ausgeliehene Aktien, obwohl er nicht im Besitz dieser Wertpapiere ist. Für den Verkauf dieser ausgeliehenen Aktien erhält der Anleger einen Betrag X_0 . Zu einem späteren Zeitpunkt kauft er die Leihgaben zurück zu einem Preis X_1 . Am Ende der Handelsperiode müssen diese Aktien- inklusive Leihgebühr- wieder an den Gläubiger zurückgegeben werden. Falls der spätere Betrag X_1 kleiner ist als die Originalsumme X_0 , so hat der Anleger Profit gemacht (nämlich $X_0 - X_1$).



PORTFOLIO RETURN

Annahme: n verschiedene Assets sind verfügbar

Wir können mit diesen n Assets nun ein MASTERASSET bilden, auch genannt *Portfolio*.

Zunächst teilen wir einen Betrag X_0 unter diesen n Assets auf. Nun wählen wir Beträge X_{0i} , $i = 1, 2, \dots, n$ mit $\sum_{i=1}^n X_{0i} = X_0$
 X_{0i} - jener Betrag, welcher in das i -te Asset investiert wurde

Die investierten Beträge können als Bruchteile der totalen Investition/Anlage ausgedrückt werden. Daher können wir schreiben:

$X_{0i} = \omega_i X_0$, $i = 1, 2, \dots, n$, wobei ω_i die Gewichtung oder der Bruchteil (weight) des Assets i in dem Portfolio ist. Natürlich gilt $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ und falls Shortselling erlaubt ist, können manche ω_i s auch negativ sein.

Sei R_i der Total Return des Assets i . Dann ist der Geldbetrag, welcher am Ende der Periode durch das i -te Asset erzeugt wurde,
 $R_i X_{0i} = R_i \omega_i X_0$.

Der totale Betrag, welcher am Ende der Periode durch dieses Portfolio erreicht wurde, ist deshalb:

$$\sum_{i=1}^n R_i \omega_i X_0.$$

Also erhalten wir, dass der gesamte Total Return des Portfolios

$$\text{gleich } R = \frac{\sum_{i=1}^n R_i \omega_i X_0}{X_0} = \sum_{i=1}^n \omega_i R_i$$

Äquivalent dazu (da $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$) erhält man $r = \sum_{i=1}^n \omega_i r_i$

ERWARTUNG-STANDARDABWEICHUNG-DIAGRAMM

Die zufälligen Rates of Return von Assets können in einem 2-dim Diagramm dargestellt werden.

Ein Asset mit $\mathbb{E}(r)$ und Standardabweichung σ wird als Punkt im Diagramm dargestellt

Solche Diagramme werden häufig auch in der *Mean-Variance Investment Analysis* verwendet.

MEAN RETURN EINES PORTFOLIOS

Annahme: Es existieren n Assets mit (zufälligen) Rates of Return $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$. Diese haben erwartete Werte $\mathbb{E}(r_1), \mathbb{E}(r_2), \dots, \mathbb{E}(r_n)$. Wie formulieren ein Portfolio mit diesen n Assets und den Gewichtungen ω_i $i = 1, 2, \dots, n$. Der Rate of Return des Portfolios bezüglich des Returns der individuellen Returns ist

$$r = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \dots + \omega_n r_n$$

Bildung des Erwartungswertes und Verwendung der Linearität liefert:

$$\mathbb{E}(r) = \omega_1 \mathbb{E}(r_1) + \omega_2 \mathbb{E}(r_2) + \dots + \omega_n \mathbb{E}(r_n)$$



VARIANZ EINES PORTFOLIO RETURNS

Varianz des Returns von Asset i : σ_i^2

Varianz des Returns des Portfolios: σ^2

Kovarianz des Returns von Asset i mit Asset j : σ_{ij}



$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mathbb{E}[(r - \mathbb{E}(r))^2] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n \omega_i r_i - \sum_{i=1}^n \omega_i \mathbb{E}(r_i)\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n \omega_i (r_i - \mathbb{E}(r_i))\right)\left(\sum_{j=1}^n \omega_j (r_j - \mathbb{E}(r_j))\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i,j=1}^n \omega_i \omega_j (r_i - \mathbb{E}(r_i)) (r_j - \mathbb{E}(r_j))\right] \\ &= \sum_{i,j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \end{aligned}$$

Sind also sowohl die Kovarianzen der Paare von Asset Returns, sowie die Assetgewichtungen (ω_i, ω_j) , die in einem Portfolio verwendet werden, bekannt, so kann die Varianz des Returns eines Portfolios auf einfachem Wege berechnet werden.



DIVERSIFIKATION

Diversifikation: Abwechslung, Streuung, Ausweitung, Sortimentserweiterung, Verteilung

Diversifikation

Portfolios mit wenigen Assets neigen zu einem hohen Grad an Risiko (dargestellt durch eine relativ große Varianz). Die Varianz des Returns eines Portfolios kann reduziert werden, indem man zusätzliche Assets in das Portfolio aufnimmt.- Ein Verfahren, das man auch *Diversifikation* nennt.



Dieses Verfahren widerspiegelt sich in dem Leitspruch:

Don't put all your eggs in one basket

Im Allgemeinen reduziert Diversifikation den gesamten erwarteten Return, während die Varianz reduziert wird.

Definition der Diversifikation lt. Börselexikon

DIVERSIFIKATION- Verteilung von Risiken auf mehrere Risikoträger mit einer möglichst geringen Korrelation. In einem Portfolio wird im Zuge dessen das Vermögen auf unterschiedliche Investments verteilt.

Dies ist die Motivation hinter dem allgemeinen Mean- Variance-Ansatz von Markowitz.

Dieser Ansatz macht den Ausgleich/die Abwägung zwischen Erwartung und Varianz deutlich.

DIAGRAMM EINES PORTFOLIOS

Annahme: 2 Assets werden in einem Mean- Standard Deviation-Diagramm abgebildet. Diese 2 Assets können angemessen an einige Gewichtungen kombiniert werden, um ein Portfolio zu formen- ein neues Asset.

Der Erwartungswert und die Standardabweichung des Rate of Returns dieses neuen Assets können über den Erwartungswert, die Varianzen und die Kovarianzen der Returns der originalen Assets berechnet werden.

Da aber die Kovarianzen auf dem Diagramm nicht angezeigt werden, kann die genaue Lage des Punktes, der das neue Asset darstellt, nicht über die Lage der originalen 2 Assets im Diagramm ermittelt werden.

⇒ *Portfolio Diagramm Lemma*

Die Kurve in einem $\mathbb{E}(r) - \sigma$ Diagramm, welche definiert ist durch eine nichtnegative Zusammensetzung von 2 Assets 1 und 2, liegt in einem dreieckigen Bereich, welcher definiert ist durch 2 originale Assets und dem Punkt auf der vertikalen Achse $A = \frac{\mathbb{E}(r_1)\sigma_2 + \mathbb{E}(r_2)\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$

feasible: realisierbar, möglich, durchführbar, ausführbar

set: Setzung, Zusammensetzung

Annahme: Es existieren n Assets

Wir plotten diese wieder als Punkte im Mean- Standard Deviation-Diagramm.

Als nächstes formen wir Portfolios mit diesen n Assets und verwenden dabei jedes mögliche Gewichtungsschema (every possible weighting scheme). Daraus erhalten wir Portfolios, die aus jedem der n Assets alleine bestehen, aus Kombinationen von 2 Assets, von 3 Assets,...also aus allen beliebigen Kombinationen der n Assets.

Diese Portfolios sind so gebaut/erstellt, indem sich dabei die Gewichtungsfaktoren ω_i über alle möglichen Kombinationen erstrecken, sodass $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$.

Die Menge der Punkte (Set of Points), die den Portfolios entsprechen, nennt man *Feasible Set* oder *Feasible Region*.

Eine typische Feasible Region ist in der Abbildung zu sehen.

Den linken Rand eines Feasible Sets nennt man *Minimum-Variance Set*, da für jeden Wert des Mean Rate of Returns, der Feasible Point mit der kleinsten Varianz (oder Standardabweichung) der entsprechende linke Randpunkt ist.

Auf diesem Set gibt es einen speziellen Punkt mit Minimum-Variance \rightarrow *Minimum- Variance-Point (MVP)*

Nehmen wir an, dass sich die Wahl des Investors über ein Portfolio auf die Feasible Points auf einer gegebenen horizontalen Linie, in der $\mathbb{E}(r) - \sigma$ Ebene beschränkt. Alle Portfolios auf dieser Kurve haben denselben Mean Rate of Return, aber unterschiedliche Standardabweichungen (oder Varianzen).

Die meisten Investoren bevorzugen das Portfolio, das mit dem Punkt ganz links auf der Linie übereinstimmt. Das ist der Punkt mit der kleinsten Standardabweichung für die gegebene Erwartung.

Ein Investor, der diesem Gesichtspunkt beipflichtet, wird auch als *risikoavers* (risikoscheu) bezeichnet, da er oder sie danach strebt, das Risiko (gemessen an der Standardabweichung) zu minimieren.

Betrachten wir nun Portfolios, die zu verschiedenen Punkten auf einer vertikalen Linie gehören. Das sind nun jene Portfolios mit einer festgesetzten Standardabweichung und verschiedenen Erwartungswerten.

Die meisten Investoren bevorzugen den höchsten Punkt auf so einer Linie, d.h. sie würden jenes Portfolio auswählen, das den größten Erwartungswert zu gegebener Standardabweichung hat.

Solche Investoren nennt man *nonsatiation*

Investoren wollen den höchstmöglichen Expected Return zu gegebener Standardabweichung. Dieses Argument impliziert, dass nur der höchste Teil des Minimum-Variance Set interessant für Investoren ist, die vom Typ risikoavers und nonsatiation sind.



Dieser obere Teil des Minimum-Variance Set wird als *efficient frontier* der Feasible Region genannt.

Das sind die effizienten Portfolios in dem Sinne, dass sie die besten Mean-Variance Kombinationen für die meisten Investoren bilden. Wir können daher unsere Untersuchungen auf dieses Frontier beschränken.



Das Markowitz Modell

Wir sollten nun in der Lage sein, ein mathematisches Problem zu formulieren, welches zu Minimum-Varianz Portfolios führt.

Wir formulieren das Problem folgendermaßen:

Minimiere $\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij}$
 in Abhängigkeit von $\sum_{i=1}^n \omega_i \mathbb{E}(r_i) = \mathbb{E}(r)$
 und $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$

Der Einfachheit halber setzen wir den Faktor „ $\frac{1}{2}$ “ vor die Varianz.

Das Markowitzproblem bildet die Basis für die Single-Period Investment Theory.



Lösung des Markowitzmodells

Das Problem befasst sich explizit mit dem Ausgleich/der Abstimmung zwischen dem erwarteten Rate of Return und der Varianz des Rate of Returns in einem Portfolio.



Wir beginnen unsere Überlegungen zur Lösung, indem wir Lagrangemultiplikatoren λ und μ verwenden.
In unserem Fall sieht die Lagrangefunktion folgendermaßen aus:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij} - \lambda (\sum_{i=1}^n \omega_i E(r_i) - E(r)) - \mu (\sum_{i=1}^n \omega_i - 1)$$

Nun differenzieren wir die Lagrangefunktion nach jeder Variable ω_i und setzen die Ableitungen 0.
Betrachten wir zunächst den Fall mit zwei Variablen und danach verallgemeinern wir den Fall für n Variable.
Für zwei Variable gilt also:

$$L = \frac{1}{2} (\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_1 \omega_2 \sigma_{12} + \omega_2 \omega_1 \sigma_{21} + \omega_2^2 \sigma_2^2) - \lambda (\mathbb{E}(r_1) \omega_1 + \mathbb{E}(r_2) \omega_2 - \mathbb{E}(r)) - \mu (\omega_1 + \omega_2 - 1)$$

Also:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \omega_1} &= \frac{1}{2} (2\sigma_1^2 \omega_1 + \sigma_{12} \omega_2 + \sigma_{21} \omega_2) - \lambda \mathbb{E}(r_1) - \mu \\ \frac{\partial L}{\partial \omega_2} &= \frac{1}{2} (\sigma_{12} \omega_1 + \sigma_{21} \omega_1 + 2\sigma_2^2 \omega_2) - \lambda \mathbb{E}(r_2) - \mu \end{aligned}$$

Aus $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ und den auf 0 gesetzten Ableitungen erhält man:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 \omega_1 + \sigma_{12} \omega_2 - \lambda \mathbb{E}(r_1) - \mu &= 0 \\ \sigma_{21} \omega_1 + \sigma_2^2 \omega_2 - \lambda \mathbb{E}(r_2) - \mu &= 0 \end{aligned}$$

⇒ Equations for efficient set

efficient set: Kurve effizienter Portfolios

Die n Portfolio-Gewichtungen ω_i für $i = 1, 2, \dots, n$ und die zwei Lagrangemultiplikatoren λ und μ für ein effizientes Portfolio (Shortselling erlaubt) mit erwartetem Rate of Return $\mathbb{E}(r)$ genügen

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \omega_j - \lambda \mathbb{E}(r_i) - \mu = 0 \text{ für } i = 1, 2, \dots, n. \text{ (a)}$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \mathbb{E}(r_i) = \mathbb{E}(r) \text{ (b)}$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \text{ (c)}$$

In der vorhergehenden Ableitung waren die Vorzeichen der ω_i -Variablen nicht eingeschränkt, das heißt Shortselling war erlaubt. Wir können Shortselling „verbieten“, indem wir jedes ω_i auf nichtnegative Werte einschränken.

Das führt zu folgender alternativen Darstellung des Markowitzproblems:

Minimiere $\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \omega_i \omega_j$
 in Abhängigkeit von $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(r_i) \omega_i = \mathbb{E}(r)$
 $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \quad \omega_i \geq 0 \text{ für } i = 1, 2, \dots, n$

Dieses Problem kann nicht auf die Lösung einer Reihe (set) von linearen Gleichungen reduziert werden. Dies bezeichnet man als ein „quadratisches Programm“ (quadratic program), da die Zielfunktion quadratisch ist und die Randbedingungen lineare Gleichungen und Ungleichungen sind. Spezielle Computerprogramme sind verfügbar, um solche Probleme zu lösen.

Assets, die risikoreich sind, haben $\sigma > 0$

Ein **Risk-Free Asset** hat einen Return, der deterministisch ist (der mit Sicherheit bekannt ist) und hat daher $\sigma = 0$.

In anderen Worten: Ein Risk-Free Asset ist ein reines zinsbringendes Instrument.

Seine Aufnahme in ein Portfolio entspricht dem *Lending* oder *Borrowing* Cash zu einem risikofreien Zinssatz.

Das risikolose Asset hat einen fixen Rate of Return r_f . Die Aufnahme eines solchen Assets vereinfacht die Form der Feasible Region erheblich. Es transformiert nämlich den oberen Rand in eine gerade Linie. Diese Linie ist das Efficient Frontier (effiziente Grenze). Das Straight-Line Frontier berührt die Original Feasible Region (der Bereich, der nur durch die Risky Assets definiert wird) in einem einzigen Punkt F . Das führt uns nun zum wichtigen

⇒ *Das ONE FUND THEOREM*

Es gibt einen Single Fund F von Risky Assets, sodass jedes effiziente Portfolio konstruiert werden kann als Kombination des Fonds F und dem risikofreien Asset.

Das heißt, dass Investoren, welche effiziente Portfolios suchen, nur in einen Master Fund von Risky Assets und in das Risk-Free Asset investieren müssen. Verschiedene Investoren werden verschiedene Kombinationen von diesen zweien bevorzugen.

Definition laut Börselexikon

Diese Portfolio-Theorie besagt, dass in effizient funktionierenden Märkten, wo jede Information bereits in die Preise eingeflossen ist, ein Mehr an Ertrag nur durch ein Mehr an Risiko erkaufte werden kann.

Das CAPM wurde von William F. Sharpe, John Lintner und Jan Mossin in den sechziger Jahren unabhängig voneinander entwickelt und baut auf der Portfoliotheorie von Harry M. Markowitz auf.

Annahmen

- Jeder ist ein Mean-Variance-Optimierer
- Jeder pflichtet der wahrscheinlichkeitstheoretischen Struktur von Assets bei, dh. also, jeder teilt zu den Returns of Assets dieselben Erwartungswerte, dieselben Varianzen und dieselben Kovarianzen zu
- Es gibt einen eindeutigen risikofreien Zinssatz (risk-free rate) für „borrowing and lending“, der für alle verfügbar ist
- Der Markt ist friktionslos, d.h., es gibt keine Handelskosten (Transaktionskosten), wie Börsengebühren etc., oder Steuern

Was geschieht nun unter diesen Annahmen?

Vom One-Fund-Theorem wissen wir, dass jeder einen Single Fund von Risky Assets kaufen wird und dazu kann man auch „borrow or lend“ zum risikolosen Zinssatz.

Außerdem, da jeder dieselben Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen verwendet, wird jeder auch denselben Risky Fund verwenden.

Jeder wird ein Portfolio zusammenstellen, welches ein Mix aus dem Risk-Free Asset und dem Single, Risky One Fund ist.

Deshalb ist der One

Fund in dem Theorem wirklich der einzige Fond, der verwendet wird.

Wenn jeder denselben Fond von Risky Assets bezieht, was muss dieser Fond dann sein?-

Die Antwort ist, dass dieser Fond dem MARKET PORTFOLIO (Marktportfolio) gleichen muss.

Das Market Portfolio ist die Summe aller Assets. In der Welt der Dividendenpapiere ist es die Gesamtheit aller Shares von IBM, GM, DIS,... Wenn jeder nur einen Fond kauft und deren Käufe ergeben den Markt, dann muss dieser eine Fond ebenfalls der Markt sein; dh. er muss Anteile von jedem Stock beinhalten, im Verhältnis zur Repräsentation dieses Stocks im gesamten Markt.

Equilibrium- Argument (Gleichgewichtsargument)

Der Return eines Assets hängt sowohl vom anfänglichen Preis, als auch vom Endpreis ab. Die anderen Investoren lösen das Mean-Variance Portfolio Problem, indem sie ihre üblichen und geläufigen Schätzungen verwenden. Passen ihre Ergebnisse nicht mit dem zusammen, was verfügbar ist, müssen sich die Preise ändern.

Die Preise der Assets unter starker Nachfrage werden steigen, die Preise von Assets unter schwacher Nachfrage werden fallen.

Diese Preisänderungen beeinflussen die Schätzungen von Asset Returns augenblicklich und daher werden die Investoren ihre optimalen Portfolios neu berechnen. Dieser Prozess wird solange fortgesetzt, bis die Nachfrage dem Angebot entspricht. Dh. es wird solange fortgesetzt, bis ein Gleichgewicht herrscht.

In einer idealisierten Welt, wo jeder Investor ein Mean-Variance Investor ist und alle dieselben Schätzungen und Annahmen treffen, kauft jeder dasselbe Portfolio und dieses muss gleich dem Marktportfolio sein. In anderen Worten: Preise passen sich an, um den Markt zur Effizienz zu führen.

Die Hauptaussage des Mean-Variance Ansatzes ist, dass der One Fund das Marktportfolio sein muss.

Mit den vorhergehenden Schlüssen, dass der Single Efficient Fund von Risky Assets das Marktportfolio ist, können wir diesen Fond im $\mathbb{E}(r) - \sigma$ Diagramm mit einem **M** für **Market** benennen.

Somit besteht das Efficient Set aus einer einzigen geraden Linie, ausgehend vom risikofreien Punkt und durch das Marktportfolio durchgehend. Diese Linie wird auch *Capital Market Line* genannt (siehe Figur 7.1)

Diese Linie zeigt die Beziehung zwischen dem erwarteten Rate of Return und dem Risk of Return (gemessen an der Standardabweichung) für effiziente Assets oder Portfolios von Assets.

Sie wird auch *Pricing Line* genannt, da Preise angepasst werden sollen, damit effiziente Assets auf dieser Linie liegen.

Die Capital Market Line (CML) sagt aus, dass, wenn das Risiko steigt, der entsprechende erwartete Rate of Return auch steigen muss.

Weiters kann diese Beziehung durch eine gerade Linie beschrieben werden, wenn das Risiko an der Standardabweichung gemessen wird.

Mathematisch ausgedrückt, sagt die CML folgendes aus:

$$\mathbb{E}(r) = r_f + \frac{\mathbb{E}(r_M) - r_f}{\sigma_M} \sigma$$

$\mathbb{E}(r_M)$Erwartungswert des Market Rate of Return

σ_MStandardabweichung des Market of Return

$\mathbb{E}(r)$Erwartungswert des Rate of Return eines beliebigen effizienten Assets

σStandardabweichung eines beliebigen effizienten Assets

Die Steigung der CML ist

$$K = \frac{\mathbb{E}(r_M) - r_f}{\sigma_M}$$

und dieser Wert wird häufig auch *Price of Risk* (Marktpreis für das Risiko) genannt. Es besagt, um wieviel sich der erwartete Rate of Return eines Portfolios erhöhen muss, wenn die Standardabweichung zunimmt.

Die Capital Market Line setzt den erwarteten Rate of Return eines effizienten Portfolios mit seiner Standardabweichung in Beziehung. Es zeigt aber nicht, wie der erwartete Rate of Return eines individuellen Assets mit seinem individuellen Risiko zusammenhängt. Diese Beziehung wird durch das Capital Asset Pricing Model ausgedrückt.

⇒ *The Capital Asset Pricing Model (CAPM)*

Wenn das Marktportfolio M effizient ist, erfüllt der erwartete Return $\mathbb{E}(r_i)$ eines beliebigen Assets i

$$\mathbb{E}(r_i) - r_f = \beta_i(\mathbb{E}(r_M) - r_f) \text{ mit } \beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

Beweis

Für ein beliebiges α bestehe das Portfolio aus einem Teil α - in Asset i investiert- und aus einem Teil $1 - \alpha$ - in das Marktportfolio M investiert. Der expected Rate of Return dieses Portfolios ist

$$\mathbb{E}(r_\alpha) = \alpha\mathbb{E}(r_i) + (1 - \alpha)\mathbb{E}(r_M)$$

und die Standardabweichung des Rate of Returns ist

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\alpha^2\sigma_i^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{iM} + (1 - \alpha)\sigma_M^2}$$

Da sich α ändert, beranden diese Werte eine Kurve im $\mathbb{E}(r) - \sigma$ Diagramm (siehe Figur 7.2)

Insbesondere entspricht $\alpha = 0$ dem Marktportfolio M . Diese Kurve kann die Capital Market Line nicht überschreiten.

Angenommen die Kurve würde die CML kreuzen, würde das Portfolio, das einem Punkt über der CML entsprechen würde, die Definition der Kapitalmarktlinie verletzen.

Da α durch 0 geht, muss die Kurve die CML bei M tangieren. Diese Berührungsbedingung kann auf die Bedingung übertragen werden, dass die Steigung der Kurve gleich ist der Steigung der Kapitalmarktlinie im Punkt M . Um diese Bedingung aufzustellen, müssen wir einige Ableitungen berechnen.

$$\frac{d\mathbb{E}(r_\alpha)}{d\alpha} = \mathbb{E}(r_i) - \mathbb{E}(r_M)$$

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = \frac{\alpha\sigma_i^2 + (1-2\alpha)\sigma_{iM} + (\alpha-1)\sigma_M^2}{\sigma_\alpha}$$

daher

$$\left. \frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}$$

Wir verwenden die Beziehung

$$\frac{d\mathbb{E}(r_\alpha)}{d\sigma_\alpha} = \frac{d\mathbb{E}(r_\alpha)/d\alpha}{d\sigma_\alpha/d\alpha}$$

um zu erhalten:

$$\left. \frac{d\mathbb{E}(r_\alpha)}{d\sigma_\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{(\mathbb{E}(r_i) - \mathbb{E}(r_M))\sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}$$

Diese Steigung muss der Steigung der Kapitalmarktlinie gleichen.

Daher,

$$\frac{(\mathbb{E}(r_i) - \mathbb{E}(r_M))\sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2} = \frac{\mathbb{E}(r_M) - r_f}{\sigma_M}$$

Auflösen nach $\mathbb{E}(r_i)$ liefert:

$$\mathbb{E}(r_i) = r_f + \left(\frac{\mathbb{E}(r_M) - r_f}{\sigma_M^2} \right) \sigma_{iM} = r_f + \beta_i (\mathbb{E}(r_M) - r_f) \text{ und somit das}$$

Gewünschte. ■

Der Wert β_i wird auch *Beta* eines Assets genannt.

Das Beta eines Assets ist alles, was man über das Risiko eines Assets wissen muss, um die CAPM Formel anzuwenden.

Der Wert $(\mathbb{E}(r_i) - r_f)$ wird auch *expected excess rate of return* des Assets i genannt.

excess: das Mehr, Überdeckung, Übermaß, Überschuss

Ebenso ist $(\mathbb{E}(r_M) - r_f)$ der *expected excess rate of return* des Marktportfolios.

Bezüglich dieser Expected Excess Rates of Return sagt das CAPM, dass der erwartete Excess Rate of Return eines Assets proportional zum erwarteten Excess Rate of Return des Marktportfolios ist, und der Proportionalitätsfaktor ist β .

Es ist nach wie vor richtig, dass allgemein das Risiko eines Portfolios bzgl σ gemessen wird, die geeignete Messgröße für das Risiko einzelner Assets sind aber deren β s.

Das gesamte Beta eines Portfolios bezüglich der Betas der einzelnen Assets in einem Portfolio ist

$$\beta_p = \sum_{i=1}^n \omega_i \beta_i$$

Die CAPM-Formel kann in grafischer Form ausgedrückt werden, indem die Formel als lineare Beziehung aufgefasst wird. Diese Beziehung wird *Security Market Line* (SML) genannt. Zwei Versionen werden in Figur (7.3) gezeigt.

Die SML drückt die Risiko-Vergütung-/die Risiko-Preis-(risk reward) Struktur von Assets gemäß dem CAPM aus und hebt hervor, dass das Risiko eines Assets von seiner Kovarianz mit dem Markt abhängig ist, oder äquivalent dazu, abhängig von seinem Beta ist.

Um zu zeigen, warum Beta das wichtigste Maß für das Risiko ist, schreiben wir den zufälligen Rate of Return von Asset i als

$$r_i = r_f + \beta_i(r_M - r_f) + \epsilon_i (*)$$

Das ist einfach nur eine beliebige Gleichung an diesem Punkt.

Die Zufallsvariable ϵ_i wurde gewählt, um es genau zu machen. Die CAPM- Formel sagt einige Dinge über ϵ_i aus.

- Bildet man in (*) den Erwartungswert, besagt das CAPM, dass $E(\epsilon_i) = 0$.
- Nimmt man in (*) die Korrelation mit r_M (und verwendet die Definition von β_i), so erhält man $cov(\epsilon_i, \sigma_M) = 0$

Wir können daher $\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + var(\epsilon_i)$ schreiben und sehen, dass σ_i^2 die Summe von zwei Teilen ist.

Den ersten Teil, $\beta_i^2 \sigma_M^2$, nennt man *systematic risk*.

Das ist das zum gesamten Markt dazugehörige Risiko (also jenes Risiko, das dem gesamten Markt beizuordnen ist). Dieses Risiko kann nicht durch Diversifikation reduziert werden, da jedes Asset mit einem beta $\neq 0$ dieses Risiko enthält.

Den zweiten Teil, $var(\epsilon_i)$, nennt man *nonsystematic risk*, *idiosyncratic* oder *specific risk*

Dieses Risiko ist unkorreliert mit dem Markt und kann durch Diversifikation reduziert werden.

[idiosyncratic: eigenartig, spezifisch]

Das systematische (oder nondiversifiable) Risiko, gemessen an Beta, ist sehr wichtig, da es direkt mit dem systematischen Risiko anderer Assets zusammenhängt.

Betrachten wir ein Asset auf der CML (um exakt auf der Linie zu sein, muss das Asset äquivalent sein zu einer Kombination aus dem Marktportfolio und dem risikofreien Asset) mit einem β -Wert. Die Standardabweichung dieses Assets ist $\beta\sigma_M$. Es hat nur systematisches Risiko; es gibt hier kein Nonsystematic Risk. Dieses Asset hat einen Expected Rate of Return, der gleich $\mathbb{E}(r) = r_f + \beta(\mathbb{E}(r_M) - r_f)$ ist.

Nun betrachten wir eine ganze Gruppe von anderen Assets, alle mit demselben β -Wert.

Dem CAPM zufolge haben diese alle denselben erwarteten Rate of Return, äquivalent zu $\mathbb{E}(r)$.

Wenn diese Assets Nonsystematic Risk tragen, fallen sie nicht von der Capital Market Line. Wenn allerdings das Nonsystematik Risk steigt, weichen die Punkte auf der $\mathbb{E}(r) - \sigma$ Ebene (die diese Assets repräsentieren) nach rechts ab. (siehe Figur 7.4).

Die horizontale Distanz eines Punktes von der CML ist daher ein Maß für das Nonsystematic Risk.

implications: Auswirkungen, Folgen, Konsequenzen

Das CAPM behauptet (oder nimmt an)- basierend auf einem Gleichgewichtsargument- dass die Lösung zum Markowitzproblem folgende ist: Dass das Marktportfolio der One Fund (und auch der einzige Fond) von risikoreichen Assets ist, den jeder halten muss. Dieser Fond wird nur durch das risikofreie Asset aufgestockt.

Die Investitions-Empfehlung ist, dass ein Investor lediglich das Marktportfolio einkaufen muss. Da es für einen einzelnen sehr mühsam wäre, das Marktportfolio zusammenzustellen, wurden gemeinsame Fonds designed, die dem Marktportfolio gleichkommen. Diese Fonds nennt man *Indexfonds*, da sie normalerweise versuchen, das Portfolio eines „Major Stock Market Index“ (Haupt- Stock- Markt- Index) zu kopieren.

Ein Bereich, wo der CAPM- Ansatz direkte Anwendung hat, ist in der Analysis of Assets, die keine bekannten/gängigen Marktpreise haben. In diesem Fall kann das CAPM verwendet werden, um einen angemessenen und vernünftigen Preis zu finden.

Die CAPM- Theorie kann verwendet werden, um die Performance (Effizienz, Leistung, Ergebnis) eines Investmentportfolios zu bewerten und in der Tat ist es heutzutage üblich, institutionelle Portfolios (wie z.B. Pensionsfonds und Mutual Funds) mit dem CAPM-Gerüst/System zu bewerten.

pricing: Preisfestsetzung, Preisermittlung, Preiskalkulation

Das CAPM ist ein Preismodell. Allerdings enthält die Standard CAPM-Formel nicht explizit Preise- nur erwartete Rates of Return. Um zu sehen, warum das CAPM Pricing Model genannt wird, müssen wir zurück zur Definition des Returns gehen.

Nehmen wir an, dass ein Asset zum Preis P erworben (gekauft) wird und später zum Preis Q wieder verkauft wird. Der Rate of Return ist dann $r = \frac{Q-P}{P}$. Hier ist P bekannt und Q zufällig. Dies in die CAPM- Formel ($R(r_i) = r_f + \beta_i(\mathbb{E}(r_M) - r_f)$) eingesetzt, ergibt:

$$\frac{\mathbb{E}(Q)-P}{P} = r_f + \beta(\mathbb{E}(r_M) - r_f)$$

Aufgelöst nach P , erhalten wir:

$$P = \frac{\mathbb{E}(Q)}{1+r_f+\beta(\mathbb{E}(r_M)-r_f)}$$

Das gibt uns den Preis des Assets laut CAPM.

⇒ Pricing Form des CAPMs:

Der Preis P eines Assets mit Payoff (Auszahlung) Q ist:

$$P = \frac{\mathbb{E}(Q)}{1+r_f+\beta(\mathbb{E}(r_M)-r_f)}, \text{ wobei } \beta \text{ das Beta des Assets ist.}$$

Diese Preisformel hat eine Form, welche die bekannte Diskontierungsformel für deterministische Situationen verallgemeinert.

Im deterministischen Fall muss die zukünftige Auszahlung bei einem Zinssatz r_f diskontiert werden (unter Verwendung des Faktors $\frac{1}{1+r_f}$).

Im zufälligen Fall ist der angemessene Zinssatz $r_f + \beta(E(r_M) - r_f)$, der als ein Risiko-angepasster Zinssatz betrachtet werden kann.

Linearity of Pricing and the Certainty Equivalent Form

Certainty: Gewissheit, Sicherheit, Tatsache

Wir diskutieren nun ein sehr wichtiges Merkmal der Pricing-Formel- nämlich, dass sie linear ist.

Dh., dass der Preis von der Summe zweier Assets die Summe derer Preise ist und der Preis eines Vielfachen eines Assets ist dasselbe Vielfache des Preises.

Linearity of Pricing and the Certainty Equivalent Form

Das ist wirklich sehr überraschend, da die Formel überhaupt nicht linear aussieht (zumindest für Summen).

Wenn z.B.

$$P_1 = \frac{\mathbb{E}(Q_1)}{1+r_f+\beta_1(\mathbb{E}(r_M)-r_f)}, P_2 = \frac{\mathbb{E}(Q_2)}{1+r_f+\beta_2(\mathbb{E}(r_M)-r_f)}$$

Scheint es nicht offensichtlich zu sein, dass

$$P_1 + P_2 = \frac{\mathbb{E}(Q_1) + \mathbb{E}(Q_2)}{1 + r_f + \beta_{1+2}(\mathbb{E}(r_M) - r_f)}$$

wobei β_{1+2} ist das Beta eines neuen Assets, welches die Summe der Assets 1 und 2 ist.

Darüber hinaus, bezogen auf unsere Erkennung, dass die Kovarianz zwischen Assets wichtig ist in der Beurteilung, wie man diese in einem Portfolio verwendet, scheint es „unangemessen“, dass die Pricing Formel linear sein sollte.

Wir können zunächst die Formel auf eine andere Gestalt umformen, die linear aussieht.

Die Form der CAPM Pricing- Formel, die deutlich Linearität zeigt, nennt man *certainty equivalent form*.

Nehmen wir an, dass wir ein Asset mit Preis P und Endwert Q haben. (hier ist P wieder bekannt und Q ungewiss).

Wir wissen $r = \frac{Q}{P} - 1$

Daraus folgt, dass der Wert von Beta

$$\beta = \frac{\text{cov}[(Q/P-1), r_M]}{\sigma_M^2} \text{ ist.}$$

$$\text{Wir erhalten } \beta = \frac{\text{cov}(Q, r_M)}{P\sigma_M^2}$$

Dies in die Pricing Formel ($P = \frac{\mathbb{E}(Q)}{1+r_f+\beta(\mathbb{E}(r_M)-r_f)}$) substituiert und Division durch P ergibt. $1 = \frac{\mathbb{E}(Q)}{P(1+r_f)+\text{cov}(Q, r_M)(\mathbb{E}(r_M)-r_f)/\sigma_M^2}$
Auflösen nach P ergibt folgende Formel:

⇒ *Certainty equivalent pricing formula*

Der Preis P eines Assets mit Payoff Q ist

$$P = \frac{1}{1+r_f} \left[\mathbb{E}(Q) - \frac{\text{cov}(Q, r_M)(\mathbb{E}(r_M)-r_f)}{\sigma_M^2} \right]$$

Der Term in den eckigen Klammern heißt *certainty equivalent* von Q .

Dieser Wert wird wie ein bestimmter/gewisser Betrag behandelt und der normale Diskontierungsfaktor ist angebracht, um P zu erhalten.

Die Certainty Equivalent Form zeigt eindeutig, dass die Pricing Formel linear ist, da beide Terme in den eckigen Klammern linear von Q abhängen.

Der Grund für die Linearität kann zurückverfolgt werden zu dem Prinzip von NO ARBITRAGE

D a n k e