Seminar aus Finanz- und Versicherungsmathematik

Zinsderivate

Derivat – Zinsderivate – Short Rate

Daniel Ferstl

01.12.2008

- Einleitung
- Zinsderivate –

  die Standard-Market-Modelle
- Short-Rate-Modelle

Definition: Ein Derivat ist ein Finanzinstrument, dessen Auszahlung an die Werte anderer Variablen gebunden ist.

Das heißt: sein Wert leitet sich vom sogenannten „Underlying“ (Waren, Wertpapieren, o.ä.) ab.

Derivate haben sich ganz natürlich entwickelt, es gibt sie im Prinzip seit tausenden Jahren:

z.B.: Ein Bauer verspricht zu einem gewissen Zeitpunkt die Lieferung einer gewissen Menge seiner Ernte gegen eine vereinbarte Gegenleistung.

= das entspricht einem Forward-Vertrag.

Seit etwa 25 Jahren haben Derivate auch eine große Bedeutung in der Finanzwelt erlangt.

An Derivatbörsen werden standardisierte Kontrakte gehandelt, deren Bedingungen die jeweilige Börse festsetzt.

Der Over-the-counter(OTC) Handel wird von Finanzinstituten über ein Telefon bzw. Computer Netzwerk betrieben und verfügt über das größere Handelsvolumen.

Einfache und daher grundlegende Arten von Derivaten sind:

- Forward- und Future-Kontrakte
- Swaps
- Optionen

Definition: Die Verpflichtung eine gewisse Anzahl eines „Underlying“ zu einem gewissen Zeitpunkt für einen gewissen Preis zu kaufen (<u>long</u>) oder zu verkaufen(<u>short</u>), nennt man einen Forward-Kontrakt.

Charakteristisch für alle Derivate ist, dass ihr Wert zu Vertragsabschluss gleich 0 ist, wodurch sich der zu vereinbarende Lieferpreis wie folgt ergibt:

$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

mit: F_k … Forward Preis, wenn Vertrag zu Zeit k geschlossen

S_k … Spot Preis = wirklicher Preis zur Zeit k

T … verbleibende Zeit bis zur Lieferung in Jahren

r … risikoloser Zinssatz

Daraus ergibt sich der Wert eines früher abgeschlossenen Forward-Kontrakts zum Zeitpunkt 0:

$$f = (F_0 - K)e^{-rT}$$

mit: f … Wert einer Long Position eines Forwards

K … Lieferpreis des Forwards

Bem: es wurden übliche vereinfachende Annahmen für den Forward Preis getroffen!

- enge Beziehung zu Forwards (Annahme: gleicher Preis)
- Börse gehandelt → standardisierte Produkte
- Vertragspartner müssen sich nicht kennen
- Marking to market – Lieferpreis wird jeden Tag neu berechnet, die Differenz auf ein Margin Konto einbezahlt oder von ihm abgehoben. Daher ist der Wert immer 0.
    - ➢ Leichter handelbar

Future Preis und Spot Preis konvergieren gegen selben Wert.

Definition: Die Vereinbarung zweier Vertragspartner die über eine gewisse Zeitdauer anfallenden Zahlungsströme zu tauschen, nennt man einen Swap.

Plain Vanilla Swap: variabler Zinssatz(wie LIBOR) wird gegen konstanten Zinssatz getauscht(bzgl. Nominalbetrag)

Auszahlung europ. Call-Option: $\max\ (S_T - K, 0)$

Auszahlung euorp. Put-Option: $\max\ (K - S_T, 0)$

Amerikanische Optionen

- Black und Black-Scholes Modell
- Anleiheoption
- Zinscap und Zinsfloor
- Swaption

Black-Scholes Formel zur Bewertung europäischer Optionen:

$$c = S_0\Phi(d_1) - e^{-rT}K\Phi(d_2)$$

$$p = e^{-rT}K\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1)$$

mit $d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln(\frac{S_0}{e^{-rT}K}) \pm \frac{1}{2}\sigma^2 T)$

wobei S_T log normalverteilt ist.

Eine Erweiterung stellt das Black-Modell dar. Hier wird dem Future Preis dieselbe log Normalverteilung unterstellt, was eine Bewertung von Optionen auf Futures darstellt:

$$c = P[0,T](F_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2))$$

$$p = P[0,T](K\Phi(-d_2) - F_0\Phi(-d_1))$$

mit $d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln(\frac{F_0}{K}) \pm \frac{1}{2}\sigma^2 T)$

Für den Fall, dass ich die Auszahlung für den Zeitpunkt T berechne, sie tatsächlich aber erst zum Zeitpunkt T* erfolgt, verwende:

$$c = P[0, T^\star](F_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2))$$

$$p = P[0, T^\star](K\Phi(-d_2) - F_0\Phi(-d_1))$$

mit $d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln(\frac{F_0}{K}) \pm \frac{1}{2}\sigma^2 T)$

Anwendbarkeit:

- Zinssatz konstant/deterministisch

  Forward Preis = Future Preis – kein Problem

- Zinssatz stochastisch

  - ➢ Forward Preis entspricht nicht Future Preis

    Warum darf ich trotzdem mit dem Forward Preis arbeiten?

  - ➢ Warum darf ich beim Diskontieren die stochastischen Zinssätze vernachlässigen?

Definition: Zinsderivat … Auszahlung hängt von einem Zinssatz ab.

Definition: Eine Option auf den Kauf oder Verkauf einer Anleihe zu einem gewissen Zeitpunkt zu einem gewissen Preis, heißt Anleiheoption.

- Eingebettete Anleiheoptionen – Callable/Putable Bond, Kredittilgung, -zusage, etc.
- Europäische Anleiheoptionen

Sei der Anleihepreis bei Fälligkeit der Option log normalverteilt. Dann sind die Formeln des Black-Modells unmittelbar anwendbar, wenn ich denForward Preis F_0 durch den Forward Anleihepreis $F_B$und entsprechend die Volatilität mit σ_B ersetze.

$$c = P[0,T](F_B\Phi(d_1) - K\Phi(d_2))$$

$$p = P[0,T](K\Phi(-d_2) - F_B\Phi(-d_1))$$

mit $d_{1,2} = \frac{1}{\sigma_B\sqrt{T}}(\ln(\frac{F_0}{K}) \pm \frac{1}{2}\sigma_B^2 T)$

wobei $F_B = \frac{B_0 - I}{P[0,T]}$

Theoretische Begründung:

Annahme: Forward-risikoneutrale Welt. Dann gilt:

$$c = P[0,T]\mathbb{E}[\max(B_T - K, 0)]$$

$$\mathbb{E}[B_T] = F_B$$

Da der Anleihepreis als log normalverteilt angenommen wird, gelangt man so zu den zuvor gezeigten Formeln.

Betrachte einen Kredit mit variabler Verzinsung, z.B. gebunden an den 6-monatigen LIBOR-Satz:

Man bekommt eine Auszahlung aus einem <u>Zinscap</u> zur Zeit, t_{k+1}wenn der variable Zins R_k zur Zeit t_k über einem gewissen Zinsniveau, der sogenannten <u>Cap Rate</u> R_K, liegt. Ein Zinscap schützt also vor zu hohen Zinszahlungen.

Die Zeitspanne zwischen den Zinsanpassungen nennt man Tenor: $\delta_k = t_{k+1} - t_k$

Zinscap als Portfolio von Zinsoptionen:

Auszahlung zu t_{k+1}: $L\delta_k \max\left(R_k - R_K\right)$

mit L … Nominalbetrag

Dies entspricht einer Auszahlung einer Kaufoption auf einen LIBOR-Zinssatz, man nennt dies einen „Caplet“.

Ein Cap besteht aus endlich vielen Caplets.

Auch Betrachtung als Portfolio von Anleiheopt. möglich.

Zinsfloor: Man bekommt eine Auszahlung vom Floor, wenn der variable Zins unterhalb der CapRate liegt.

Analog bekommt man eine Darstellung als Portfolio von Zins- (jetzt Verkaufsoption) oder Anleiheoptionen(„Floorlets“)

Collar: Kombination von Cap(long) und Floor(short). Der Zins soll also zwischen 2 Werten liegen. Normal keine Kosten da zu Beginn Preise von Cap und Floor gleich.

Call-Put-Parität: Preis Cap = Preis Floor + Preis Swap.

Bewertung eines Caplets:

$$c = L\delta_k P[0, t_{k+1}](F_k \Phi(d_1) - R_K \Phi(d_2))$$

$$p = L\delta_k P[0, t_{k+1}](R_K \Phi(-d_2) - F_k \Phi(-d_1))$$

mit $d_{1,2} = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{t_k}} (\ln(\frac{F_k}{R_K}) \pm \frac{1}{2} \sigma_k^2 t_k)$

Wobei die Forward Rate der Erwartungswert des log normalverteilten Zinssatzes für den jeweiligen Caplet ist.

Der Wert eines Caps ist also die Summe der Werte aller Caplets, aus denen er sich zusammensetzt.

Alle Caplets müssen getrennt berechnet werden. Dabei verwendet man entweder für jeden Caplet eine andere Volatilität (Spot-Volatillität) oder für jeden Caplet dieselbe, die dann aber von der Länge der Laufzeit des Caps abhängt(Flat-Volatilität).

Theoretische Begründung:

Annahme: Forward-risikoneutrale Welt. Dann gilt:

$$c = L\delta_k P[0, t_{k+1}]\mathbb{E}[\max(R_k - R_K, 0)]$$

$$\mathbb{E}[R_k] = F_k$$

Da die zukünftigen Spot Rates als log normalverteilt angenommen werden, gelangt man so zu den zuvor gezeigten Formeln.

= Option auf einen Zinsswap.

Also: Eine <u>Swaption</u> gibt ihrem Inhaber das Recht(nicht Pflicht) zu einem gewissen Zeitpunkt in einen Zinsswap einzutreten.

Beispiel: Firma nimmt in 6 Monaten Kredit mit var. Verzinsung für 5 Jahre. Möchte lieber konstante Zinsen, also einen Swap.

Firma kann gegen Prämie in Swaption einsteigen(kon. Zins 8%), in 6 Monaten vergleichen mit aktuellem Swap. Wenn dieser unter bzw. über 8%, Swaption nicht bzw. ausüben.

Bewertung:

Sei die Swap Rate s_T - jener konstante Zins, der in einem zur Zeit T neu emittierten Swap für eine best. Laufzeit n mn-mal gegen den LIBOR-Satz getauscht werden kann - zur Fälligkeit der Option log normalverteilt.

Sei weiter s_K der feste, in der Swaption vereinbarte Zins.

Vergleich: Zahlungsströme der Swaps mit s_K und s_T:

Auszahlung Swaption für einen Zeitpkt: $\frac{L}{m}\max\ (s_T - s_K\,, 0)$

Mit Auszahlungsterminen $T_1, T_2, \dots, T_{mn}$ folgt der Wert der Swaption als Summe von Zahlungsströmen:

$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P[0, T_i](s_0 \Phi(d_1) - s_K \Phi(d_2))$$

mit $d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln(\frac{s_0}{s_K}) \pm \frac{1}{2}\sigma^2 T)$

wobei s_0 die Forward Swap Rate ist.

Mit $A = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{mn} P[0, T_i]$ folgt $LA(s_0\Phi(d_1) - s_K\Phi(d_2))$, wobei A die Annuität beziechnet.

Analog mit LIBOR zahlen und konstanten Zins bekommen erhält man:

$$LA(s_K\Phi(-d_2) - s_0\Phi(-d_1))$$

Theoretische Begründung:

Annahme: Forward-risikoneutrale Welt. Dann gilt:

$$LA\mathbb{E}[\max(s_T - s_K, 0)]$$

$$\mathbb{E}[s_T] = s_0$$

Da die zukünftigen Swap Rates als log normalverteilt angenommen werden, gelangt man so zu den zuvor gezeigten Formeln.

Jedes der drei Modelle ist (für sich allein) in sich konsistent, sie sind es allerdings nicht untereinander.

Es kann immer nur eine der drei zukünftigen Werte als log normalverteilt angenommen werden.

Das Black-Modell findet breite Anwendung für Caps, Anleiheoptionen und Swaptions, aber es berücksichtigt die Veränderung von Zinssätzen nicht. Es ist daher für amerikanische Swaptions, callable bonds, usw. nicht geeignet.

- Short Rate
- Gleichgewichtsmodelle
- No-Arbitrage-Modelle
- Zinsbäume

Definition: Der Zinssatz r, der zum Zeitpunkt t für einen unendlich kleinen Zeitabschnitt gilt, heißt Short Rate oder momentaner kurzfristiger Zinssatz.

Betrachte: Prozess von r in risikoneutraler Welt

$\bar{r}$ … Durchschnitt von r über $[t, T]$

$R(t, T)$ … Zinssatz zur Zeit t über $[t, T]$:

$$\mathbb{E}\left[e^{-\bar{r}(T-t)}\right] = P[t, T] = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

Also gilt $R(t,T) = -\frac{1}{T-t} \ln\left(\mathbb{E}[e^{-\bar{r}(T-t)}]\right)$

Wenn der Prozess von r vollständig bestimmt ist, kann man jeden Zinssatz für jeden Zeitpunkt und jede Laufzeit berechnen.

Man braucht Short-Rate-Modelle.

Itô-Prozess: $dr = m(r)dt + s(r)dz$

$m(r)$ … momentane Drift

$s(r)$ … momentane Standardabweichung

Nur von r, nicht von Zeit abhängig.

1-Faktor und 2-Faktor-Modelle

Rendleman-Bartter-Modell:

$$dr = \mu r\, dt + \sigma r\, dz$$

μ und σ konstant, d.h. Prozess folgt geometrischer brownscher Bewegung. Keine Mean Reversion.

Mean Reversion:

Hoher Zinssatz fällt eher

Niedriger Zinssatz steigt eher

Zinssätze tendieren langfristig zu Duchschnittsniveau.

<u>Vasicek-Modell:</u>

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\, dz, \quad \text{a,b,}\sigma \text{ ... Konstante}$$

Vorteil: berücksichtigt Mean Reversion: a “zieht” r zu b

Nachteil: Short Rate kann negativ sein.

Sobald a,b,σ bekannt ⇒ gesamte Zinsstrukturkurve linear abhängig von $r(t)$ beschreibar:

Nach oben geneigt, nach unten geneigt oder mit Hügel.

Modell von Cox, Ingersoll und Ross:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}\,dz$$

Gleiche Mean Reversion wie bei Vasicek, aber

Standardabweichung proportional zu $\sqrt{r}$.

Short Rate stets nichtnegativ.

Steigende, sinkende, gekrümmte Zinsstrukturkurven.

2-Faktor-Modelle

Nachteil der Gleichgewichtsmodelle:

nicht genau an aktuelle Zinsstruktur angepasst

⇒ mit Parameterwahl annähern

Drift Rate zeitunabhängig

Vorteil der No-Arbitrage-Modelle:

Sind genau angepasst(akt. Zinsstruktur ist Modell-Input)

Drift Rate zeitabhägig.

Überführen von Gleichgewichts- in No-Arbitrage-Modelle,
durch Drift zeitabhängig modellieren.

Ho-Lee-Modell:

Binomialbaum-Modell von Anleihepreisen mit 2 Parametern: kurzfristige Standardabweichung, Marktpreis des Risikos der Short Rate.

Konvergiert in stetiger Zeit gegen

$$dr = \theta(t)dt + \sigma\, dz$$

σ konstant, $\theta(t)$ definiert mittlere Richtung von r zur Zeit t.

$\theta(t)$ so wählen, dass Modell an anfängliche Zinsstruktur angepasst, $\theta(t) = F_t(0, t) + \sigma^2 t$ mit F mom. Forward Rate.

<u>Einfaktor-Modell v. Hull-White:</u>

$$dr = [\theta(t) - ra]dt + \sigma\, dz = a\left[\frac{\theta(t)}{a} - r\right]dt + \sigma\, dz$$

Ho-Lee-Modell mit Mean Reversion,

 für a=0 ist Ho-Lee-Modell

Erweiterung von Vasicek: zeitabhängiges Reversionsniveau

a,σ … Konstante, $\theta(t) = F_t(0,t) + aF(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$

analytisch gut handhabbar, aber Short Rate kann negativ sein.

Black-Karasinski-Modell:

$$d \ln r = [\theta(t) - a(t) \ln r]dt + \sigma(t)dz$$

Short Rate stets nichtnegativ.
ln r folgt gleichem Prozess wir r in Hull White.

Aber Wert von zukünftigen r hier log normalverteilt, statt normalverteilt, wie bei den beiden Modellen zuvor.

Analytisch schlecht handhabbar.

<u>2-Faktor-Modell von Hull-White:</u>

Ähnlich wie Brennan Schwartz:

$$df(r) = [\theta(t) + u - af(r)]dt + \sigma_1 dz_1$$

wobei Zufallsvaribale u dem Prozess

$$du = -bu\,dt + \sigma_2 dz_2$$

folgt und Komponente des Revisionsniveaus ist.

a,b, σ_1, σ_2 … Konstante

Zinsbaum: zeitdiskrete Darstellung des Prozesses von r.

Verwende Trinomialbaum mit Zeitschritten Δt und stetig verzinsten Zinssätzen.

Diskontierungsfaktor in jedem Knoten unterschiedlich.

2 alternative Verzweigungen zur üblichen„1-Auf,Gleich,1-Ab“: „2-Auf, 1-Auf, Gleich“, „Gleich, 1-Ab, 2-Ab“ … gut zur Berücksichtigung von Mean Reversion

Verfahren zur Konstruktion von Zinsbäumen:

$$dR = [\theta(t) - aR]dt + \sigma\, dz$$

1.Schritt:

Konstruiere Baum für R^*, zu Beginn 0, folgt dann

$$dR^* = -aR^* dt + \sigma\, dz$$

ΔR … Abstand zwischen Zinssätzen im Baum

(i, j) … Knoten mit $t = i * \Delta t$ und $R^* = j\Delta R$

$j > j_{max}$ … wechsle zu Abwärtsverzweigung

$j < j_{min}$ … wechsle zu Aufwärtsverzweigung

$R^*(t+\Delta t) - R^*(t)$…nomalverteilt
⇒mittlere Änderung $-aR^*\Delta \mathrm{t}$, Varianz $\sigma^2\Delta t$

p_u, p_m, p_d… Ws. für Schritt rauf, gleich, runter (LGS lösen)

z.B. für normale Verzweigung:

$$p_u\Delta R - \ p_d\Delta R = -aR^*\Delta t$$
$$p_u\Delta R^2 + \ p_d\Delta R^2 = \sigma^2\Delta t + a^2{R^*}^2\Delta \mathrm{t}^2$$
$$p_u + p_m + p_d = 1$$

Nur von j abhängig

2.Schritt:

R^*- Baum in R-Baum transformieren

⇒Knoten so verschieben, dass genau anfängliche Zinssätze

$$\alpha_i = \alpha(i\Delta t) = R(i\Delta t) - R^*(i\Delta t)$$

$Q_{i,j}$ … Barwert von Wertpapier, das bei erreichen von Knoten (i, j) 1 bezahlt

$\alpha_i, Q_{i,j}$ so berechnen, dass anfängliche Zinsstruktur genau

$Q_{0,0} = 1$ klar

α_0 nachschauen (momentan für Δt geltender Zins)

Formeln für $\alpha_i, Q_{i,j}$:

α_m so bestimmen, dass in $(m+1)\Delta t$ fälliger Zerobond richtig bewertet: $P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-(\alpha_m + j\Delta R)\Delta t}$

mit n_m=Anz. Knoten unterhalb des zentralen in $m\Delta t$

$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k,j) e^{-(\alpha_m + k\Delta R)\Delta t}$

mit $q(k,j)$ Ws. für Bewegung von Knoten (m,k) nach (m+1,j) andere Modelle:

$$df(R) = [\theta(t) - af(R)]dt + \sigma\, dz$$

$x = f(R)$

1.Schritt: Baum für x^* mit Anfangswert 0 und $(t) = 0$

2.Schritt: Knoten um α_i verschieben

Formeln anpassen:

g Inverse zu f, sodass $g(\alpha_m + j\Delta x)$ Zinssatz an (m, j)

Numerischer Verfahren notwendig

Für $f(r) = r \Rightarrow$ Hull-White: analytisch lösbar,
aber negatives r möglich

Für $f(r) = \ln r \Rightarrow$ Black-Karasinski: analytisch nicht lösbar,
aber r stets nichtnegativ

Gutes Modell:

$f(r)$ so wählen, dass für $r < 1\%$ Zinssätze log nomalverteilt
für $r > 1\%$ Zinssätze normalverteilt