Zeitreihenanalyse in der Finanzmathematik

Claudia Michalecz

21. Jänner 2009

Inhaltsverzeichnis

Grundlagen

Modelle

Zeitreihenanalyse

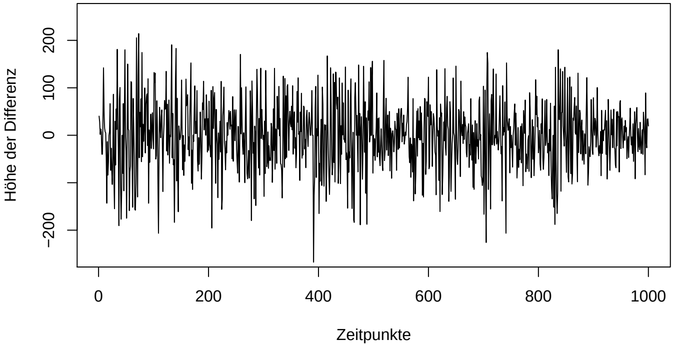
multivariate Zeitreihen

Der Begriff Zeitreihe

Zeitreihe

Eine Zeitreihe ist eine (zeitlich) geordnete Folge $(X_t)_{t \in T}$ von Beobachtungen einer bestimmten Größe, wobei die Reihenfolge der Messungen relevant ist. Im allgemeinen kann von keiner Unabhängigkeit von aufeinanderfolgender Messungen sprechen.

Beispiele für Zeitreihen (I)



Beispiel einer Zeitreihe: täglichen Kursdifferenzen des FTSE100-Indexes zu 1000 Tageswerten zwischen dem 1. Juli 1998 und dem 15. Mai 2002.

Beispiele für Zeitreihen (II)

- Physik
- Marketing
- Finanzmathematik

Eigenschaften

- Zwischen den Werten bstehen (geringe) Abhängigkeiten.
- Serie der Absolutwerte mit greifbaren Abhängigkeiten.
- Bedingte Erwartungswerte nahe null.
- Variierende Schwankungen über die Zeit.
- Leptokurtische Form (spitze Verteilung, starke Wölbung).
- Extreme Werte treten in Gruppen auf.

grundlegende Definitionen (I)

streng stationär

Eine Zeitreihe $(X_t)_{t\in\ \mathbb{Z}}$ nennt man streng stationär, wenn die Verteilung jedes endliche Teilsystems mit der Verteilung eines um k Zeitpunkte verschobenen Teilsystems ident ist.

$$(X_t, ..., X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+k}, ..., X_{t_n+k}), \quad \forall t_1, ..., t_{t_n}, k \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

grundlegende Definitionen (II)

schwach stationär

Die Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ bezeichnet man als schwach stationär, wenn die ersten zwei Momente existieren, die Erwartungswerte konstant sind und die Kovarianzen nur vom zeitlichen Abstand abhängen:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \mu & & t \in \mathbb{Z}, \text{(mittelwertsstationär)} \\ \gamma(t,s) &= \gamma(t+k, s+k) & & t,s,k \in \mathbb{Z} \text{(schwach stationär)}. \end{aligned}$$

grundlegende Definitionen (III)

Autokorrelationsfunktion (ACF)

Die **Autokorrelationsfunktion (ACF)** $\rho(h)$ eines schwach stationären Prozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ist definiert durch:

$$\rho(h) = \rho(X_h, X_0) = \gamma(h)/\gamma(0) \quad \forall h \in \mathbb{Z}$$

White Noise

White Noise Prozess

Weißes Rauschen oder auch White Noise, ist ein schwach stationärer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit der Autokorrelationsfunktion:

$$\rho(h) = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases}$$

strenger White Noise Prozess

Eine Serie von unabhäbhängig, identisch verteilten Zufallsvariablen $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit endlicher Varianz σ^2 wird als strenger White Noise Prozess bezeichnet. Dieser ist das einfachste Beispiel für einen White Noise Prozess.

Moving Average Prozess

Moving Average Prozess

Als ein Moving Average Prozess der Ordnung q (MA(q)) wird ein Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bezeichnet, wenn er sich in folgender Form

$$X_t = \epsilon_t - \beta_1\epsilon_{t-1} - ... - \beta_q\epsilon_{t-q} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

darstellen lässt.

Autoregressiver-Prozess

Autoregressiver Prozess

Als einen Autoregressiven Prozess, auch AR(p)-Prozess, bezeichnet man einen stochastischen Prozess der mit folgender Gleichung darstellbar ist:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + ... + \alpha_p X_{t-p} + \epsilon_t \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

ARMA-Prozess

ARMA-Prozess

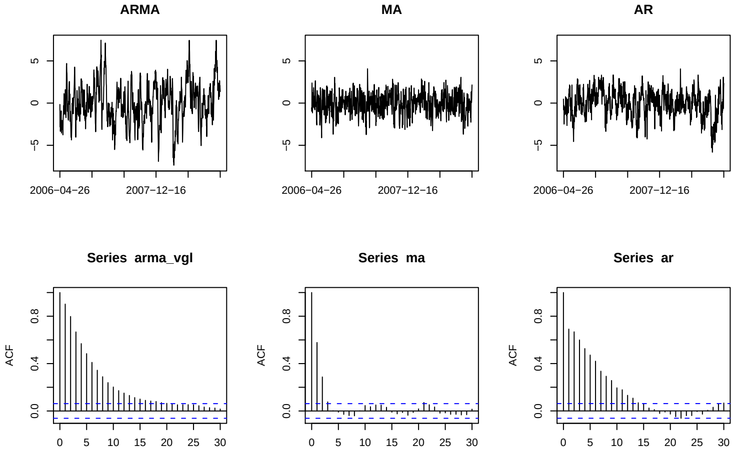
Sei $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein White Noise Prozess mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2. Ein ARMA(p,q) Prozess mit Erwartungswert 0 ist ein kovariantstetiger Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, welcher die Differenzengleichung

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \ldots - \phi_p X_{t-p} = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \epsilon_{t-q}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

erfüllt.

Kombination aus AR(p)- und MA(q)-Prozess.
Definition für einen Prozess mit Erwartungswert μ auch anwendbar auf die zentrierte Serie $(X_t - \mu)$.

Darstellung AR(p), MA(q) und ARMA(p,q)



ARCH-Prozess

ARCH-Prozess

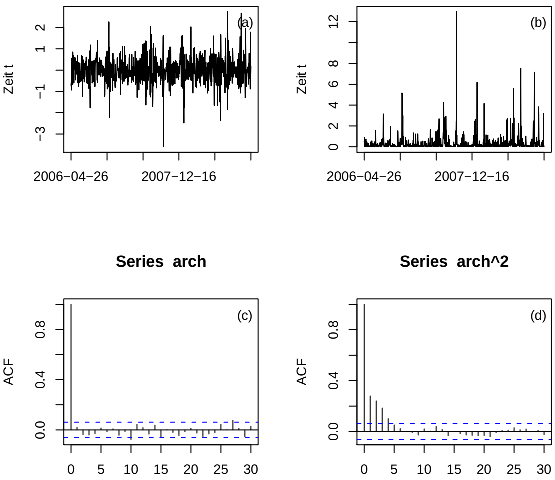
$(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sei ein strenger White-Noise-Prozess SWN(0,1). Ein strenger stationärer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ wird als ARCH-Prozess bezeichnet, wenn für alle $t \in \mathbb{Z}$ und einige streng positive Werte $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ folgende Gleichungen erfüllt werden:

$$X_t = \sigma_t Z_t,$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2$$

wobei $\alpha_0 > 0$ und $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, ..., p$

Beispiel ARCH(3)



Eigenschaften ARCH-Prozess

- Leptokurtische Form.
- $\rho(h)$ nahe null für $h > 0$.
- Quadratische Werte weisen Volatitätscluster auf.

GARCH-Prozess

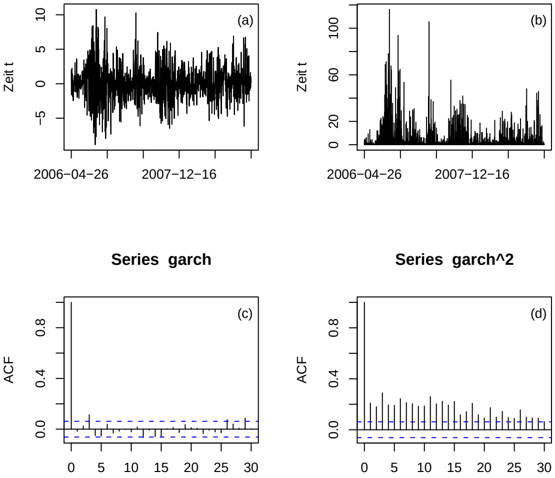
GARCH-Prozess

$(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sei ein strenger White-Noise-Prozess SWN(0,1). Ein streng stationärer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ wird als GARCH-Prozess bezeichnet, wenn für alle $t \in \mathbb{Z}$ und einige streng positive Werte $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ folgende Gleichungen erfüllt werden:

$$\begin{aligned} X_t &= \sigma_t Z_t, \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned}$$

für $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, ..., p$ und $\beta_j \geq 0$, $j = 1, ..., q$.

Beispiel GARCH(3,2)



Unterschied von GARCH zu ARCH

- Varianz abhängig von früheren Varianzen.
- Korrelationen der quadratischen Werte nicht zwingend fallend.

Zeitreihenanalyse

Grundsätzliche Vorgehensweise:

1. Prüfung auf strengen White Noise.
2. Bestimmung eines passenden Modells.
3. Anpassung/Abschätzung der Modellparameter.
4. Prüfung der Gültigkeit des angepassten Modells.
5. Prognose für die Zukunft.

Anlayse mittels ARMA(p,q)-Modell

Bestimmung von p und q mittels Korrelationen und partiellen Korrelationen.

Anpassung der Parmater:

- AR(p)-Prozesse: mittels Yule-Walker-Gleichungen
- ansonsten: mittels Maximum-Likelihood

Gültigkeitsprüfung durch Berechnung der „Zufallswerte“ und Prüfung auf White Noise.

$$\hat{\epsilon_t} = X_t - \hat{\mu}_t,$$

$$\hat{\mu}_t = \hat{\mu} + \sum_{i=1}^{p} \hat{\phi} i(X_{t-i} - \hat{mu}) + \sum_{j=1}^{q} \hat{\theta}_j \hat{\epsilon}_{t-j}$$

ARCH und GARCH

Schätzung der Ordnung.

Anpassung ebenfalls mittels Maximum-Likelihood:

$$f_{X_0,\ldots,X_n}(x_0,\ldots,x_n) = f_{X_0}(x_0)\prod_{t=1}^{n} f_{X_t|X_{t-1},\ldots,X_0}(x_t|x_{t-1},\ldots,x_0)$$

Beispiel: ARCH(1) (I)

Zu schätzen: α_0, α_1:
Prozess ist nur abhängig von X_{t-1}:

$$f_{X_t|X_{t-1},...,X_0}(x_t|x_{t-1},...,x_0) = f_{X_t|X_{t-1}}(x_t|x_{t-1}) = \frac{1}{\sigma_t} g(\frac{x_t}{\sigma_t})$$

Die Formel ist zurückführbar auf den Anfangswert X_0:

$$f_{X_1,...,X_n|X_0}(x_1,...,x_n|x_0) = \prod_{t=1}^{n} f_{X_t|X_{t-1},...,X_0}(x_t|x_{t-1},...,x_0)$$

Beispiel: ARCH(1) (II)

Bildung der bedingten Dichte mit:

$$f_{X_t|X_{t-1},...,X_0}(x_t|x_{t-1},...,x_0) = f_{X_t|X_{t-1}}(x_t|x_{t-1}) = \frac{1}{\sigma_t} g(\frac{x_t}{\sigma_t})$$

wobei σ_t sich aus der Vergangenheit direkt berechnen lässt mittels:

$$\sigma_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2}$$

Likelihoodfunktion ergibt sich mit:

$$L(\alpha_0, \alpha_1; X) = f_{X_1,...,X_n|X_0}(x_1,...,x_n|x_0) = \prod_{t=1}^{n} \frac{1}{\sigma_t} g(\frac{X_t}{\sigma_t})$$

Beispiel: GARCH(1,1)

Zu schätzen: $\alpha_0, \alpha_1, \beta$ Funktionsbildung vergleichbar mit ARCH(1)-Prozess.
Wichtier Unterschied: σ_0 ist ebenfalls Startwert.

Likelihoodfunktion:

$$L(\alpha_0, \alpha_1, \beta; X) = f_{X_1,\dots,X_n|X_0,\sigma_0}(x_1, \dots, x_n|x_0, \sigma_0) = \prod_{t=1}^{n} \frac{1}{\sigma_t} g(\frac{X_t}{\sigma_t})$$

mit $\sigma_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2}$.

Benötigte Werte bei ARCH und GARCH

- $X_1, ..., X_t$
- $X_{-p+t}, ..., X_0$
- $\sigma_{-q+1}, ..., \sigma_0$

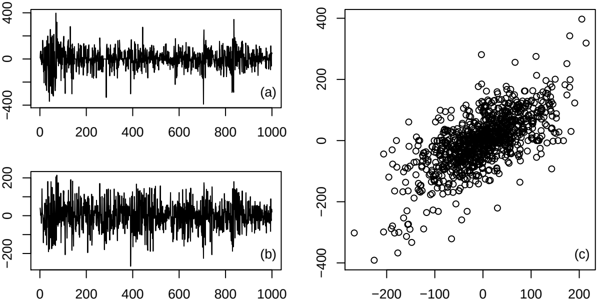
Ansatz:

- $X_{-p+t} = ... = X_0 = \bar{X}$
- $\sigma_{-q+1} = ... = \sigma_0 = 0$

Multivariate Zeitreihen

- Betrachtung von zwei oder mehr Zeitreihen gemeinsam.
- Zeitwerte werden als Vektoren betrachtet und
- Zeitreihen zusammen als Prozess $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
- Korrelationen nun auch übergreifend.

Beispiel: Zusammenhang zweier Zeitreihen



Gegenüberstellung der Kursdifferenzen von FTSE100 und SMI zwischen dem 1. Juli 1998 und dem 15. Mai 2002.
(a)SMI-Kurs (b)FTSE100-Kurs. (c) Gebenüberstellung mittels QQ-Plot.

Grundlegende Definitionen

- Begriffe vergleichbar mit univariaten Definitionen.
- Korrelations Matrix Funktion (P(h)) ersetzt ACF.

Multivariater White Noise

Ein schwach stationärer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ist ein multivariater White Noise Prozess, wenn seine Korrelations Matrix Funktion wie folgt aufgebaut ist:

$$P(h) = \begin{cases} P, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases}$$

VARMA-Prozess

VARMA-Prozess

Sei $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein multivariater White Noise Prozess $WN(\mathbf{0}, \Sigma_\epsilon)$.
Die schwach stationäre Lösung $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ der Differenzengleichung

$$X_t - \Phi_1 X_{t-1} - ... - \Phi_p \mathbf{X}_{t-p} = \epsilon_t + \Theta_1 \epsilon_{t-1} + ... + \Theta_q \epsilon_{t-q} \quad \forall t \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

wobei die Parmeter Φ_i und Θ_j Matrizen der Form $\mathbb{R}^{dxd}$ sind, ist ein VARMA(p,q)-Prozess mit Erwartungswert null.
Ein VARMA(p,q)-Prozess mit Erwartungswert μ ergibt sich, wenn der Prozess $(\mathbf{X}_t - \mu)_{t\in\mathbb{Z}}$ die obrige Differenzengleichung erfüllt.

multivariater GARCH-Prozess

$(\mathbf{Z}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sei ein SWN($\mathbf{0}$,I_d). Der Prozess $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sei ein multivarianter GARCH-Prozess, wenn er streng stationär und die Gleichung:

$$\mathbf{X}_t = \Sigma_t^{\frac{1}{2}}\mathbf{Z}_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

wobei $\Sigma_t^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^{dxd}$ der Cholesky-Faktor der positiv-definiten Matrix Σ_t ist.

Quellen und weiterführende Informationen

- Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools *von Alexander J. McNeil, Rüdiger Frey, & Paul Embrechts, Kapitel 4, Financial Time Series*
- Zeitreihenanalyse *von Rainer Schlittgen und Bernd Streitberg, 6. Auflage, 1995*
- http://www.luchsinger-mathematics.ch/kap4.pdf, *Stand: 20.1.2009*
- http://www.itl.nist.gov/div898/software/dataplot/refman1/auxillar/ljungbox.htm, *Stand: 20.1.2009*