

Fondsgebundene Lebensversicherung

Andrea Orthofer

19. Dezember 2008

- Ein Produkt, welches in der Vergangenheit immer größere Popularität gewann, ist die fondsgebundene Lebensversicherung. Die so genannten „Unit-Linked“-Produkte versprechen im Allgemeinen bei dem Eintritt des versicherten Ereignisses eine bestimmte Anzahl von Anteilen eines Fonds. Sie möchte sozusagen stärker als das klassische Produkt von den Chancen der Kapitalmärkte profitieren.
- Für diese Art der Versicherung ist es charakteristisch, dass die Leistungen im Erlebens- oder auch im Todesfall nicht deterministisch, sondern zufällig sind.
- Durch Einführung einer Mindestgarantie kann dem Versicherungsnehmer eine „risikolose“ Anlage gewährt werden.

Wenn wir nun solche Versicherungen betrachten, müssen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$N(t)$ = Anzahl der Leistungsanteile zur Zeit t

$S(t)$ = Wert eines Anteils zur Zeit t

Wenn man nun $N(t)$ als deterministisch annimmt, können wir eine reine Todesfallversicherung folgendermaßen anschreiben:

	Traditionell	(pure)Unit Linked
Auszahlung beim Tod	$C(t) = 1$	$C(t) = S(t)$
Wert (Zeit 0)	$\pi_0(t) = \exp(-\delta t)$	$\pi_0 = S(0)$
Einmalprämie	$\mathbb{E}\left[\int_0^T \pi_0(t) d(I_{\{T_x \leq t\}})\right]$ $= \int_0^T e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt$	$\mathbb{E}\left[\int_0^T \pi_0(t) d(I_{\{T_x \leq t\}})\right]$ $= S(0) \int_0^T {}_t p_x \mu_{x+t} dt$ $= (1 - {}_T p_x) S(0)$

Getroffene Annahme

Bei der Berechnung der Einmalprämie haben wir implizit angenommen haben, dass der auf die Zeit 0 diskontiert Wert des Fonds zur Zeit t im Mittel stets dessen Wert zur Zeit 0 entspricht.

Einführung einer Garantiezahlung

Bis jetzt haben wir uns Produkte ohne Zinsgarantie angesehen, doch wie schon erwähnt kann man eine Garantie (z.B. Rückgewähr der einbezahlten Prämien) einbauen. Diese Garantie hat zum Beispiel folgende Gestalt:

$$G(t) = \int_0^t \bar{p}(s) ds$$

wobei $\bar{p}(s)$ die Prämien-dichte zur Zeit s bezeichnet.

Garantie in der Höhe der zu einem fixierten Zinssatz verzinsten Prämien:

$$G(t) = \int_0^t e^{r(t-s)} \bar{p}(s) ds$$

Somit hat man eine Auszahlungsfunktion

$$C(t) = \max(S(t), G(t))$$

Annahmen

Wert des Fonds entwickelt sich gemäß eines stochastischen Prozesses, mit Wahrscheinlichkeitsmaß P .

Man muss ein äquivalentes Martingalmaß finden um die Arbitragemöglichkeit auszuschließen.

Wenn wir von einem „fairen“ Markt ausgehen, ist der Wert der diskontierten Auszahlung

$$\pi_0(C(t)) = \mathbb{E}^Q[\max(S(t), G(t))]$$

wobei Q ein zu P äquivalentes Maß ist, unter welchem der diskontierte Wert ein Martingal ist.

Betrachten wir nun die Auszahlung $C(t)$, so können wir feststellen, dass es sich um eine Option handelt, deren Preis wir mit Hilfe der „arbitrage free pricing“-Theorie, bestimmen können.

Wir müssen uns daher damit beschäftigen, welchen Wert unsere Option zum Zeitpunkt 0 hat.

Wie schon erwähnt, führt der Erwartungswert zu verfälschten Preisen und somit zur Arbitrage.

Aus diesem Grund wollen wir die einfachste Ökonomie betrachten, indem wir uns auf endliche Modelle beschränken.

Im Folgenden werden wir einige Kenntnisse aus der Finanzmathematik benötigen, die wir nun kurz wiederholen. Wir betrachten:

- den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) mit Ω endlich
- $P(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$
- eine endlichen Zeithorizont T
- \mathcal{F}_t ist die σ -Algebra der zur Zeit t beobachtbaren Ereignisse
- es gibt $k < \infty$ stochastische Prozesse, welche den Verlauf der Wertschriften $1, \dots, k$ repräsentieren.

$S = \{S_t, t = 0, 1, 2, \dots, T\}$ mit Komponentnen S^0, S^1, \dots, S^k .

Wir nehmen an, dass S_t^j der Preis der j -ten Wertschrift zur Zeit t ist und jedes S^j bezüglich $(\mathcal{F}_t)_t$ adaptiert ist.

- S_t^0 ist die nullte Wertschrift und hat eine besondere Bedeutung, da wir annehmen, dass $S_t^0 = (1 + r)^t$ ist, wodurch wir die Möglichkeit haben risikofrei zu einem Zins r zu investieren.

Definition einer Handelsstrategie:

Eine Handelsstrategie ist ein vorhersehbarer ($\phi \in \mathcal{F}_{t-1}$) Prozess $\Phi = \phi_t, t = 1, 2, \dots, T$ mit Komponenten ϕ_t^k , wobei ϕ_t^k die Anzahl der Wertschriften der Nummer k , welche wir zwischen $[t-1, t)$ halten.

ϕ_t nennt man auch Portfolio, dessen Wert zur Zeit t , wie folgt angeschrieben wird:

Zeit Wert des Portfeuillees

$$t - 1 \quad \phi_t \cdot S_{t-1}$$

$$t^- \quad \phi_t \cdot S_t$$

Wodurch wir einen Gewinn von $\phi_t \Delta S_t$ im Intervall $[t - 1, t)$ erhalten

$$G(\phi) = \sum_{\tau=1}^t \phi_{\tau} \cdot \Delta S_{\tau} \quad \text{im Intervall } [0, t]$$

wobei wir $G_0(\phi) = 0$ setzen.

G ist ein adaptierter, reellwertiger stochastischer Prozess, in unserem Fall als Gewinnprozess bezeichnet.

Definition:

Eine Handelsstrategie ist selbstfinanzieren, falls

$$\phi_t \cdot S_t = \phi_{t-1} \cdot S_t \quad \forall t = 1, 2, \dots, T - 1.$$

Das bedeutet, dass zu keiner Zeit dem Portefeuille Geld zugeführt oder abgezogen wird.

Definition:

Der Preis des Portefeuilles wird mit

$$\pi = V_0(\phi)$$

bezeichnet.

Arbitrage

Definition:

Eine Handelsstrategie heißt Arbitragemöglichkeit, falls für den zugehörigen diskontierten Portefeuilleprozess gilt:

- $\phi \in \Phi$ mit $V_0(\phi) = 0$
- $V_T(\phi) \geq 0$
- $P[V_T(\phi) > 0] > 0$

Definition

Eine Abbildung

$$\pi : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty), X \mapsto \pi(X)$$

heißt genau dann Preissystem, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- $\pi(X) = 0 \iff X = 0$
- π ist linear

Definition:

Ein Preissystem nennt man konsistent, falls

$$\pi(V_T(\phi)) = V_0(\phi) \quad \text{für alle } \phi \in \Phi$$

wobei wir mit Π die Menge der konsistenten Preissysteme bezeichnen.

Definition:

Die Menge \mathbb{P} : sind die zu \mathbf{P} äquivalentes Maße \mathbf{Q} , unter welchem $\beta \times S$ ein Martingal ist, wobei β den Diskontierungsfaktor von der Zeit t nach 0 bezeichnet.

Wir wissen auch, dass zwischen den Mengen der konsistenten Preissystem $\pi \in \Pi$ und den Maßen $\mathbf{Q} \in \mathbb{P}$ eine Bijektion existiert, die folgendermaßen definiert ist:

1. $\pi(X) = \mathbb{E}^{\mathbf{Q}}[\beta_T X]$
2. $Q(A) = \pi(S_T^0 I_{\{A\}})$ für alle $A \in \mathcal{A}$

Stetiger Fall

Definition:

Unter einer Trading strategy ϕ verstehen wir einen lokal beschränkten, vorhersehbaren Prozess.

Definition:

Der Wertschöpfungsprozess, welcher der Handelsstrategie ϕ zugeordnet ist, ist definiert als:

$$V : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi \mapsto V(\phi) = \phi_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^k \phi_t^k \cdot S_t^k$$

Definition:

Der Gewinnprozess G ist definiert durch:

$$G : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi \mapsto G(\phi) = \int_0^T \phi dS = \int_0^T \sum_{i=0}^k \phi^k dS^k$$

Definition:

ϕ ist selbstfinanzieren, falls $V_t(\phi) = V_0(\phi) + G_t(\phi)$

Definition:

Der Preis einer Bezugsgröße X ist gegeben durch

$$\pi(X) = \mathbb{E}^Q[\beta_T X]$$

Das ökonomische Modell

Um einen Preis zu berechnen ist ein zugrundeliegendes ökonomisches Modell notwendig.

Betrachten wir nun das meist verwendete Modell der geometrischen Brownschen Bewegung.

Allgemeine Konvention

- T_x bezeichnet stets die zukünftige Lebensdauer eines x -jährigen
- $\mathcal{H}_t = \sigma(\{T > s\}, 0 \leq s \leq t)$ ist die von T_x erzeugte σ -Algebra
- Für die Wertschriften nehmen wir an, dass sich das Portfolio gemäß W einer standardisierten Brownschen Bewegung entwickelt.
- \mathcal{G}_t bezeichnen wir die von W erzeugte σ -Algebra, erweitert um die P -Nullmenge

Ein wichtiger Aspekt in unserer Betrachtung ist die Unabhängigkeit der Finanzvariablen. Das bedeutet, dass die σ -Algebren \mathcal{G}_t und \mathcal{H}_t stochastisch unabhängig sind. Dies bedeutet, dass die Finanzvariablen unabhängig von der zukünftigen Lebensdauer sind. Somit bezeichnen wir die von \mathcal{G}_t und \mathcal{H}_t erzeugte σ -Algebra mit $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{G}_t, \mathcal{H}_t)$.

Das Black-Scholes-Marktmodell

Dieses Marktmodell besteht aus zwei Anlagemöglichkeiten:

Risikofreie Anlage:

$$B(t) = \exp(\delta t)$$

Fonds, durch eine geometrische Brownschen Bewegung modelliert:

$$S(t) = S(0) \exp\left[\left(\eta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right]$$

mit $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$

Wobei S die Lösung folgender stochastischen Differentialgleichung darstellt $dS = \eta S dt + \sigma S dW$

Nun betrachten wir die diskontierten Werte von B und S :

$$B^*(t) = \frac{B(t)}{B(t)} = 1$$

$$S^*(t) = \frac{S(t)}{B(t)} = S(0) \exp\left[\left(\eta - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right]$$

Berechnung der Optionspreise

Um die Optionspreise zu bestimmen muss man zuerst ein äquivalentes Martingalmaß bestimmen. Wir benötigen somit ein Maß \mathbf{Q} , sodass S^* ein Martingal unter \mathbf{Q} ist.

Hierzu definieren wir uns folgende Radon-Nikodym-Dichte:

$$\xi_t = \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\eta - \delta}{\sigma} \right)^2 t - \frac{\eta - \delta}{\sigma} W(t) \right) \quad \forall t \in [0, T]$$

Wegen eines Folgesatzes des Girsanov-Theorems aus der Theorie der stochastischen Integration folgt, dass

$$\hat{W}_t = W(t) + \frac{\eta - \delta}{\sigma} t$$

unter $\mathbf{Q} = \xi P$ eine standardisierte Brownsche Bewegung ist.

Nun müssen wir zeigen, dass nach dieser Transformation

$$S^*(t) = S(0) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma \hat{W}(t)\right)$$

unter \mathbf{Q} ein Martingal ist.

Somit entsprechen die Preise einer Option dann dem Erwartungswert unter \mathbf{Q} .

Beweis

Für $t, u \in \mathbb{R}$, $u > t$ ist die folgende Gleichheit zu beweisen:

$$\mathbb{E}^Q[S^*(u)|\mathcal{F}_t] = S^*(t)$$

Dafür ist folgende Notation notwendig:

$$u = t + \Delta t, W_u = W_t + \Delta W \text{ und } Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^Q [S^*(u) | \mathcal{F}_t] &= \\ &= \mathbb{E}^Q \left[S(0) \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 t + \sigma \hat{W}(t) + \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \Delta t + \sigma \Delta \hat{W} \right) \right) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= S^*(0) \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 t + \sigma \hat{W}(t) \right) \mathbb{E}^Q \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z \right) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= S^*(t) \end{aligned}$$

Somit ist gezeigt, dass \mathbf{Q} ein zu \mathbf{P} äquivalentes Maß ist, unter welchem S^* ein Martingal ist. Somit existiert mindestens ein konsistentes Preissystem.

Nachdem wir nun eine geeigneten Ökonomie mit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, S und B definiert haben, können wir nun den Preis einer Todesfallsumme $C(T)$ zur Zeit t bestimmen:

$$\pi_t = \mathbb{E}^Q[\exp(-\delta(T-t))C(T)|\mathcal{F}_t]$$

Berechnung der Einmaleinlagen für dieses Marktmodell für die Erlebensfallversicherung, sowie für die Temporäre Todesfallversicherung:

- **Erlebensfallversicherung**

$$V(0) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\exp(-\delta T)C(T)]_T p_x$$

- **Temporäre Todesfallversicherung**

$$V(0) = \int_0^T \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\exp(-\delta t)C(t)]_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Notation mit Garantiezuspruch

Notation

$C(\tau)$	Versicherungssumme zur Zeit τ
$N(\tau)$	Anzahl der Fonds zur Zeit τ
$S(\tau)$	Kurs der Wertschrift zur Zeit τ
$G(\tau)$	Garantierte Leistung zur Zeit τ
$C(\tau) = \max\{N(\tau)S(\tau), G(\tau)\}$	Versicherte Summe

Für unsere Berechnung der Nettoeinmalprämie für eine reine Erlebensversicherung und Todesfallversicherung verwenden wir das Black-Scholes-Modell.

Black und Scholes gehen in ihrem Modell davon aus, dass:

- der zu betrachtende Wertpapierkurs einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt
- es keine Transaktionskosten gibt
- die Möglichkeit des zeitstetigen Handels
- Arbitragefreiheit verlangt wird

Als wichtiges Instrument nutzen wir die Black-Scholes-Formel:

$$C(t) = S(t)\Phi(d_1(t, S(t))) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2(t, S(t)))$$

mit

$$d_1(t, S(t)) = \frac{\log\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2(t, S(t)) = d_1(t, S(t)) - \sigma\sqrt{T-t}$$

Wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet:

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

Die Black-Scholes-Formel beschreibt den Preisprozess eines europäischen Calls.

Ein europäischer Call mit Strike K für ein Wertpapier S hat den Wert

$$(S_T - K)^+ = \max\{S(T) - K, 0\}$$

Ein europäischer Call kann erst zum Zeitpunkt T , am Ende der Laufzeit, ausgeübt werden. Ähnliches gilt auch für die Mindestgarantie in unserem Vertrag, die nur dann greift, wenn die DAX-Anlage nicht ausreichend gut ist. Sie stellt somit eine Art Option dar.

Zum Vertragsende ($t = T$) wird der Wert der DAX-Anlage ausbezahlt, mindestens aber die Mindestgarantie G . Der Zahlungsanspruch lautet folglich:

$$C(T) = \max\{G(T), N(T)S(T)\}$$

Wir wollen voerst die Nettoeinmalprämie für die Erlebensfallversicherung betrachten:

Der Wert der Erlebensfallversicherung zur Zeit Null beträgt $\mathbb{E}^Q[C^*(T)]$ somit gilt:

$${}_T G_x = {}_T p_x \mathbb{E}^Q[\max\{N(t)S^*(T), G^*(T)\}]$$

wobei

$$S^*(T) = S(0) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma \hat{W}(T)\right) \quad \text{mit} \quad \hat{W}(T) \sim N(0, T)$$

somit erhält man:

$${}_T G_x = {}_T p_x \int_{-\infty}^{\infty} \max \left[N(T)S(0) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\xi\right), G^*(T) \right] f(\xi) d\xi$$

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{1}{2T}\xi^2\right)$$

Nun setzen wir $\bar{\xi} = \frac{1}{\sigma} \left[\ln \left(\frac{G^*(T)}{N(T)S(0)} \right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T \right]$. Wenn nun $\xi > \bar{\xi}$ dann auch $N(T)S^*(T) > G^*(T)$ ist.

Somit berechnet sich die Einmaleinlage wie folgt:

$$\begin{aligned}
 {}_T G_x &= {}_T p_x(G^*(T) \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} f(\xi) d\xi + N(T)S(0) \int_{\bar{\xi}}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\xi) f(\xi) d\xi) \\
 &= {}_T p_x(G^*(T) \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} f(\xi) d\xi \\
 &\quad + N(T)S(0) \int_{\bar{\xi}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp(-\frac{1}{2T}(\xi - \sigma T)^2) d\xi)
 \end{aligned}$$

Womit man durch Vereinfachen der Terme zu folgendem Ergebnis kommt:

$${}_T G_x = {}_T p_x [G(T) \exp(-\delta T) \Phi(-d_2^0(T)) + S(0)N(T) \Phi(d_1^0(T))]$$

mit

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$d_1^t(s) = \frac{\ln \left[\frac{N(s)S(t)}{G(s)} \right] + \left(\delta + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (s-t)}{\sigma \sqrt{s-t}}, \quad (s > t)$$

$$d_2^t(s) = \frac{\ln \left[\frac{N(s)S(t)}{G(s)} \right] + \left(\delta - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (s-t)}{\sigma \sqrt{s-t}}, \quad (s > t)$$

Analoges Rechnen wie oben, führt für die Nettoeinmalprämie für eine temporäre Todesfallversicherung in der Höhe von

$$C(t) = \max\{N(t)S(t), G(t)\},$$

auf folgendes Ergebnis:

$$G_{x:T}^1 = \int_0^T (G(t) \exp(-\delta t) \Phi(-d_2^0(t)) + S(0)N(t) \Phi(d_1^0(t)) {}_t p_x \mu_{x+t}) dt$$

Die Thielesche Differentialgleichung

- Um die Thielesche Differentialgleichung herzuleiten, muss zuerst die Prämie für diesen Versicherungstyp eingeführt werden.
- $\bar{p}(t)$ ist die Prämiedichte zur Zeit t

Mit Hilfe des Äquivalenzprinzips gelten folgende Gleichungen:

$${}_T G_x = \int_0^T \bar{p}(t) \exp(-\delta t) {}_t p_x dt$$
$$G_{x:T}^1 = \int_0^T \bar{p}(t) \exp(-\delta t) {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Deckungskapital

Erlebensfallversicherung:

$$V(t) = T_{-t} p_{x+t} \pi_t(T) - \int_t^T \bar{p}(\xi) \exp(-\delta(\xi - t)) {}_{\xi-t}p_{x+t} d\xi$$

Deckungskapital

Todesfallversicherung:

$$V(t) = \int_t^T (\pi_t(\xi) \mu_{x+\xi} - \bar{p}(\xi) \exp(-\delta(\xi - t))) {}_{\xi-t}p_{x+t} d\xi$$

mit

$$\pi_t(s) = G(s) \exp(-\delta(s-t)) \Phi(-d_2^t(s)) + N(s)S(t) \Phi(d_1^t(s))$$

$$d_1^t(s) = \frac{\ln\left[\frac{N(s)S(t)}{G(s)}\right] + \left(\delta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t)}{\sigma\sqrt{s-t}}$$

$$d_2^t(s) = \frac{\ln\left[\frac{N(s)S(t)}{G(s)}\right] + \left(\delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t)}{\sigma\sqrt{s-t}}$$

für $s > t$.

Itô-Formel

Bemerkung:

Im Gegenzug zum klassischen Fall, sind die Reserven nicht deterministisch, sondern vom Wert der zugrundeliegenden Wertschriften S abhängig.

Aus diesem Grund müssen wir anstatt der deterministischen Differentialgleichung, die Itô-Formel verwenden:

Itô-Formel

Im stetigen Fall lautet diese folgendermaßen:

$$df(W) = f' dW + \frac{1}{2} f'' ds$$

Wobei W eine standardisierte Brownsche Bewegung bezeichnet.

Somit ergibt sich:

- Die Differentialgleichung für den Marktwert einer reinen Erlebenversicherung:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \bar{p}(t) + (\mu_{x+t} + \delta)V(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \delta S(t) \frac{\partial V}{\partial S}$$

- Die Differentialgleichung für den Marktwert einer temporären Todesfallversicherung:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \bar{p}(t) + (\mu_{x+t} + \delta)V(t) - C(t)\mu_{x+t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \delta S(t) \frac{\partial V}{\partial S}$$

Beweis

Da

$$\pi_t^*(T) = \exp(-\delta t)\pi_t(T)$$

und das Nettodeckungskapital folgendermaßen definiert ist:

$$V(t) = T-t p_{x+t}\pi_t^*(T) \exp(\delta t) - \int_t^T \bar{p}(\xi) \exp(-\delta(\xi - t))_{\xi-t} p_{x+t} d\xi$$

und somit

$$\pi_t^*(T) = \Psi(t) \left[V(t) + \int_t^T \bar{p}(\xi) \exp(-\delta(\xi - t))_{\xi-t} p_{x+t} d\xi \right]$$

wobei

$$\Psi(t) = \frac{\exp(-\delta t)}{T-t} p_{x+t}$$

Da π_t^* eine Funktion von S und t ist, kann die Itô-Formel auf die Funktion $\pi_t^*(t, S)$ angewendet werden.

Beweis

Dadurch erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 d\pi_t^* &= \frac{\partial}{\partial t} \pi_t^* \frac{\partial}{\partial S} \pi_t^* (rSdt + \sigma Sd\hat{W}_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} \pi_t^* \sigma^2 S^2 dt \\
 &= \left[\frac{\partial}{\partial t} \pi_t^* + \frac{\partial}{\partial S} \pi_t^* rS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} \pi_t^{*2} S^2 \right] dt + \frac{\partial}{\partial S} \pi_t^* \sigma Sd\hat{W}_t
 \end{aligned}$$

Beweis

Durch Berechnung der einzelnen Terme kommen wir schließlich auf:

$$\pi_s^*(T) = \pi_t^*(T) + \int_t^s \Psi(\xi) \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S d\hat{W}(\xi)$$

$$+ \int_t^s \Psi(\xi) \left[\frac{\partial V}{\partial S} \delta S + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - (\mu_{x+\xi} + \delta) V(\xi) + \frac{\partial V}{\partial t} - \bar{p}(\xi) \right] d\xi$$

Da wir wissen, dass $\pi^*(T)$ ein Martingal ist, muss der Driftterm verschwinden. Und wir erhalten das gesuchte Resultat:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \bar{p}(t) + (\mu_{x+t} + \delta) V(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \delta S(t) \frac{\partial V}{\partial S}$$

- Die ersten Terme der Differentialgleichung entsprechen dem klassischen Fall. Das heißt die Abhängigkeit von den Prämien, der Sterblichkeit und dem Zins.
- Bedingt durch den Fonds kommt noch der Term $-\frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \delta S(t) \frac{\partial V}{\partial S}$ hinzu, welcher durch die Fluktuation der zugrunde liegenden Wertschrift S bedingt ist.
- Für den Fall, dass die Sterblichkeitsdichte und die Prämien-dichte gleich null wären, würden wir die Black-Scholes Formel erhalten.

Delta-Hedging

Delta

Delta ist eine Kennzahl, welche die wertmäßige Veränderung einer Option bei Änderung des Aktienkurses um eine Einheit angibt.

Mit Delta wird ein Bezugsverhältnis von Optionen und Aktien angegeben.
Somit kann man sich gegen das Kursrisiko absichern.

Im Falle von fondsgebundenen Lebensversicherungen, soll das Risiko der Erzielung der Mindestgarantie abgesichert werden.

Man nimmt eine Hedging-Strategie (α_t, β_t) an, wobei α_t die Anzahl der DAX-Zertifikate und β_t die Anzahl der Zero-Bonds mit Wert 1 bei Fälligkeit T beschreibt, welche zur Zeit t gehalten werden müssen.

Für die Hedging-Strategie muss zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T)$ gelten:

$$\pi_t(C) \stackrel{!}{=} \alpha_t S(t) + \beta_t e^{-r(T-t)}$$

Durch einen Koeffizientenvergleich erhalten wir:

$$\alpha_t = \Phi(d_1(t, S(t)))N(t)$$

$$\beta_t = G(1 - \Phi(d_2(t, S(t))))).$$

Voraussetzungen um eine selbstfinanzierende Strategie zu behalten:

- muss ein zeitstetiges Handeln möglich sein
- müssen Transaktionskosten außer Acht gelassen werden

Da diese Bedingungen in der Praxis nicht immer umsetzbar sind, müssen alternative Methoden angewendet werden.

Diskretes Handeln

- Diese Annahme ist viel praxisnäher
- Diese Annahme ist jedoch nicht mehr mit den Annahmen Black-Scholes-Modells konform.
- Man nimmt an, dass man das Portfolio immer nach gewissen Tagen anpasst.

Den Wert, den das Hedge-Portfolio zum Zeitpunkt $t \in [0, T)$ hat, gibt man wie folgt an:

$$\tilde{V}_t(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \tilde{\alpha}_{t_-} S_t + \tilde{\beta}_{t_-} e^{-r(T-t)}$$

wobei t_- nur die Zeitpunkte annimmt, an denen das Portfolio tatsächlich angepasst wird.

Dieses Portfolio stellen wir dem „idealen“ Wert mittels Black-Scholes-Modell gegenüber:

$$V_t(\alpha, \beta) = \alpha_t S_t + \beta_t e^{-r(T-t)}$$

Nun setzen wir an den Tagen, an denen angepasst wird, die Anzahl der DAX-Anleihen und den Zero-Bond auf den idealen Wert:

$$\tilde{\alpha}_t := \alpha_t \quad \tilde{\beta}_t := \beta_t$$

Die selbstfinanzierende Eigenschaft des Hedging-Portfolios geht verloren.

Hedgingkosten

Da wir nun keine Selbstfinanzierung mehr haben, nimmt man am Kapitalmarkt Geld auf oder legt es an. Der entsprechende Betrag C lässt sich wie folgt bestimmen:

$$C = (\tilde{\alpha}_{t-1} - \tilde{\alpha}_t)S_t + (\tilde{\beta}_{t-1} - \tilde{\beta}_t)e^{-r(T-t)}$$

Beträge werden bis zum Laufzeitende verzinst und aufaddiert. Zum Zeitpunkt T entstehen nachfolgende Hedgingkosten (negative Kosten = Gewinn).

Vega-Hedging

Vega

Vega beschreibt die Änderungsrate im Verhältnis zur Volatilität des Underlyings:

$$\mathcal{V} = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \sigma}$$

Aus der Black-Scholes-Formel mit dem dort definierten d_2 ergibt sich das Vega eines Calls auf eine dividendenfreie Aktie als:

$$\mathcal{V} = S\sqrt{(T-t)}\varphi(d_2 + \sigma\sqrt{(T-t)})$$

Da die Black-Scholes-Formel unter der Annahme konstanter Volatilität hergeleitet worden ist, ist es eigentlich nicht gerechtfertigt, \mathcal{V} durch Ableiten der Black-Scholes-Formel nach σ zu berechnen. Die obige Formel für \mathcal{V} ist aber sehr ähnlich zu einer Gleichung für $\partial C / \partial \sigma$, die aus einem allgemeineren Modell mit stochastischer Volatilität folgt, so dass sie näherungsweise benutzt werden kann.

Idealfall:

Ein „zero Vega“ zu erreichen.

Um dies zu erlangen muss man $\frac{-Vega_P}{Vega_T}$ in entsprechenden Optionen halten, wobei $Vega_P$, das Vega des Portfolios und $Vega_T$, das Vega der jeweiligen Option beschreibt.

Rho-Hedging

Zinsschwankungen abzusichern ist mit der Rho-Hedging-Methode möglich, wobei Rho eine Kennzahl ist, welche die Änderungsrate des Portfolios im Verhältnis zum Zinssatz darstellt.

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r}$$

Für einen Call auf eine dividendenfreie Aktie ergibt sich aus der Black-Scholes-Formel:

$$\rho = K(T - t)e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

Ziel: ein „zero Rho“ zu erreichen, um gegen Zinsrisiken perfekt abgesichert zu sein.

Bei Währungsoptionen müssen dabei neben den inländischen auch die Zinsschwankungen im Land der Fremdwährung berücksichtigt werden, so dass beim Rho-Hedgen zwei verschiedene Werte ρ_1, ρ_2 betrachtet werden.

All diese entsprechende Instrumente, sprich Optionen, für das Rho-, als auch für das Vega-Hedging sind jedoch sehr schwierig zu finden.

Abschließend lässt sich sagen, dass das hier erläuterte Modell nur als Grundgerüst für komplexere Annahmen verwenden lässt, und somit eine große Bandbreite an Variationspielraum zulässt.

Variationsmöglichkeiten

Für den fondsgebundenen Lebensversicherungsvertrag gibt es außerdem viele Variationsmöglichkeiten, die jeweils in die Modellierung einbezogen werden müssten. Diese Variationen sind zum Beispiel:

Variable Anlagemöglichkeiten:

Die Möglichkeit zwischen verschiedenen Anlagemöglichkeiten der Prämie zu wählen. Somit kann der Versicherungsnehmer sein persönliches Portfolio aus verschiedenen Fonds während der gesamten Vertragslaufzeit verändern.

Kündigungsrecht:

Um den Absatz an Produkten zu steigern, sollte der Versicherer seinen Kunden ein Kündigungsrecht einräumen

Variable Beitragszahlungen:

Die angenommene Einmalprämie, kann auch durch variable Beitragszahlungen erbracht werden.

Mindestgarantie nur im Todesfall:

Lebt der Versicherte zum Vertragsende noch, bekommt er nur den DAX-Wert $\frac{P}{S_0} S_T$ ausbezahlt. Das bedeutet, der Versicherungsnehmer trägt bis zum Laufzeitende das Risiko der Kapitalanlage selber. Bei dieser Variante wird jedoch oft angeboten, dass der Versicherungsnehmer bei Vertragsende entscheiden kann, ob er den Wert der DAX-Zertifikate ausbezahlt haben möchte oder die DAX-Zertifikate behalten möchte. So kann der Versicherte einen eventuellen Verlust durch mögliche zukünftige Wertsteigerungen ausgleichen.

Einführung

Preissysteme

Das ökonomische Modell

Berechnung der nötigen Einmaleinlagen mit Garantie

Die Thiele'sche Differentialgleichung

Hedging

Delta-Hedging

Vega-Hedging

Rho-Hedging

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!