

# Optimale Rückversicherung

Sabine Polzer

20. Januar 2009

# Was ist eine Rückversicherung

- Versicherung, die Versicherungsgesellschaften abschließen.
- Deckung für ein Einzelrisiko oder ein ganzes Portfolio wird ganz oder teilweise von einem Versicherer auf einen anderen Versicherer übertragen, ohne Auflösung der ursprünglichen Versicherung.

Der Grund für das Funktionieren von Versicherung ist der sogenannte *Ausgleich im Kollektiv*.

Ausgleich im Kollektiv verringert Schätz- und Zufallsrisiko des Versicherungsunternehmens.

Wenn Sicherheitswahrscheinlichkeit  $G(b + c)$  zu niedrig, kann Versicherungsunternehmen Versicherungsschutz kaufen.

Rückversicherung ist einfacher als die Alternativen Erhöhung der Prämieinnahme, Erhöhung des Sicherheitskapitals oder Verbesserung der Gesamtschadenverteilung.

Rückversicherung bewirkt eine Verringerung des versicherungstechnischen Risikos.

- Formen der proportionalen Rückversicherung
  - 1 *Quoten-Rückversicherung* (fester, gleicher Prozentsatz)
  - 2 *Summenexzedenten-Rückversicherung* (Selbstbehaltsanteil beträgt  $c = c(v) = \min(v_0/v, 1)$ )
- Formen der nichtproportionalen Rückversicherung
  - 1 *Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung* (Erstversicherer trägt Erstrisiko  $\min(X, a_0)$ , Rückversicherer hat  $\max(X - a_0, 0)$  zu zahlen)
  - 2 *Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung*
  - 3 *Jahresüberschaden-Rückversicherung* (Erstversicherer trägt  $\min(S, s_0) + \max(S - s_0 - s_1, 0)$ , der Rückversicherer  $\min(\max(S - s_0, 0), s_1)$ )

Zwei prinzipielle Entscheidungen:

- Form der Risikoteilung
  - proportional  $X = cX + (1 - c)X$
  - nichtproportional  $X = \min(X, a) + \max(X - a, 0)$
- und ob sich  $X$  auf den Einzel-, Kumul- oder Jahresschaden bezieht.
- Umfang der Risikoteilung (bei rein proportionaler Risikoteilung das Aufteilungsverhältnis  $c : (1 - c)$  oder bei rein nichtproportionaler Risikoteilung die Höhe der Schadengrenze  $a$ ).

Rückversicherung für ein Jahr abgeschlossen und regelt die Teilung des Jahresgesamtschadens  $S$  des Erstversicherers in einer bestimmten Versicherungssparte.

Bezeichnet  $b$  die zu  $S$  gehörende, um Akquisitions- und Verwaltungskosten gekürzte Prämieinnahme des Erstversicherers, so hat dieser das betriebswirtschaftliche Ergebnis

$$b - S \quad \text{vor Rückversicherung}$$

mit dem Ergebnis

$$b - S - (b(R) - R) - k_1 \quad \text{nach Rückversicherung}$$

zu vergleichen.

Der Rückversicherer hat als betriebswirtschaftliches Ergebnis aus diesem Vertrag 0 **vor** Vertragsabschluss und  $b(R) - R - k_2$  **nach** Vertragsabschluss, wobei  $k_2$  seine auf diesen Vertrag entfallenden Akquisitions- und Verwaltungskosten sind.

$b(R)$  muss also mindestens so hoch sein wie  $E(R) + k_2$ , wenn der Rückversicherer nicht auf Dauer Verlust machen will.

Erst- und Rückversicherer zusammen haben also nach Rückversicherung ein um  $k_1 + k_2$  schlechteres betriebswirtschaftliches Ergebnis als vor Rückversicherung.

Es ergeben sich zwei Probleme:

- Können durch Rückversicherung entstehende zusätzliche *Transaktionskosten*  $k_0 = k_1 + k_2$  durch *Synergieeffekte* wieder wettgemacht werden?
- Ein Modell ist zu entwickeln, anhand dessen der Erstversicherer entscheiden kann, ob die Variante ohne Rückversicherung oder die Variante mit Rückversicherung für ihn günstiger ist.

Richtige Bemessung der Rückversicherungsprämie ist wichtig!!

Sie muss mindestens so hoch sein, dass sie Betriebskosten und Schwankungszuschlag des Rückversicherers deckt, aber höchstens so hoch, dass dem Erstversicherer genügend bleibt, um seinerseits Transaktionskosten und Schwankungszuschlag erwirtschaften zu können.

## Bezeichnungen

$S$  = Gesamtschaden des Erstversicherers vor Rückversicherung,

$b$  = um Akquisitions- und Verwaltungskosten gekürzte  
Prämieneinnahme des Erstversicherers,

$R$  = auf den Rückversicherer transferierter Teil von  $S$ ,

$b(R)$  = Rückversicherungsprämie (inkl. Verwaltungskosten und  
Schwankungszuschlag des Rückversicherers),

$Q$  =  $S - R$  = Selbstbehalts-Gesamtschaden des Erstversicherers,

$b(Q)$  =  $b - b(R)$  = Selbstbehaltsprämie.

## Entscheidungsprinzip des Erstversicherers

„Wähle  $R$  und  $b(R)$  möglichst so, dass für den Selbstbehalt  $Q = S - R$  das angestrebte Sicherheitsniveau erreicht ist und das erwartete Selbstbehaltsergebnis  $b(Q) - E(Q) = b - b(R) - E(Q)$  maximal ist.“

Das Sicherheitsniveau bei gegebenem Sicherheitskapital  $c$  haben wir bisher mittels des *Modells der einjährigen Verlustwahrscheinlichkeit*

$$P(S > b + c) \quad \text{bzw.} \quad P(Q > b(Q) + c)$$

quantifiziert.

Unter der Annahme, dass  $S$  und  $Q$  normalverteilt sind und das der kalkulatorische Gewinn  $b - E(S)$  bzw.  $b(Q) - E(Q)$  an die Kapitalgeber ausgeschüttet wird, sind diese Wahrscheinlichkeiten gleich

$$1 - \Phi(c/Sta(S)) \quad \text{bzw.} \quad 1 - \Phi(c/Sta(Q)),$$

wenn  $\Phi$  die Standard-Normalverteilung bezeichnet.

## Varianzmodell

„Wähle  $R$  und  $b(R)$  möglichst so, dass die Selbstbehaltsvarianz  $\text{Var}(Q)$  das angestrebte Niveau nicht überschreitet und das erwartete Selbstbehaltsergebnis  $b(Q) - E(Q)$  möglichst groß ist.“

Ruinwahrscheinlichkeit, die ein kontinuierliches mehrjähriges Analogon zur einjährigen Verlustwahrscheinlichkeit ist - Spezialfall des Nutzenmodells.

Jedes mögliche Selbstbehaltsergebnis  $x = b(Q) - Q$  mithilfe einer Nutzenfunktion  $u(x)$  bewertet, für die  $u'(x) > 0$  und  $u''(x) < 0$  gilt.

### Gemäß dem Nutzenmodell ...

... wird die Rückversicherung so gewählt, dass der Erwartungswert des Nutzens des resultierenden Selbstbehaltsergebnisses möglichst groß wird:

„Wähle  $R$  und  $b(R)$  möglichst so, dass bei gegebenem Sicherheitskapital  $c$  und gegebener Nutzenfunktion  $u$  die Nutzenerwartung  $E(u(c + b(Q) - Q))$  möglichst groß ist.“

Schließlich ist noch anzumerken, dass das Modell mit der Verlustwahrscheinlichkeit und das Varianzmodell jeweils folgende zur vorigen äquivalenten Formulierung besitzen:

### Verlustwahrscheinlichkeits-Modell

„Wähle  $R$  und  $b(R)$  möglichst so, dass  $b(Q) - E(Q)$  ein angestrebtes Mindestniveau nicht unterschreitet und die Verlustwahrscheinlichkeit  $P(Q > b(Q) + c)$  möglichst klein wird.“

### Varianz-Modell

„Wähle  $R$  und  $b(R)$  möglichst so, dass  $b(Q) - E(Q)$  ein angestrebtes Mindestniveau nicht unterschreitet und die Varianz  $Var(Q)$  möglichst klein wird.“

Auch das Nutzenmodell kann analog umformuliert werden.

## Idealisierter funktionaler Ansatz der Transaktionskosten

Transaktionskosten werden als die Veränderung

$$\begin{aligned}k(R) &= b - E(S) - (b(Q) - E(Q)) \\ &= b(R) - E(R)\end{aligned}$$

des erwarteten betriebswirtschaftlichen Ergebnisses vor bzw. nach Rückversicherung definiert.

## Satz (Borch, Kahn Pesonen)

Sind die Transaktionskosten  $k$  eine bei allen Rückversicherungsformen  $R$  gleiche Funktion  $g$  des Erwartungswerts  $E(R)$ , d.h.  $k(R) = g(E(R))$ , so ist gemäß Varianzmodell die unlimitierte Stop-Loss-Rückversicherung optimal für den Erstversicherer.

### Satz (Beard, Pentikäinen, Pesonen)

Sind die Transaktionskosten  $k$  eine bei allen Rückversicherungsformen gleiche monoton wachsende Funktion  $k(R) = h(\text{Var}(R))$  der Varianz des Rückversicherungsschadens  $R$ , so ist gemäß dem Varianzmodell die Quoten-Rückversicherung für den Erstversicherer optimal.

Optimale Entscheidung des Erstversicherers hängt nicht von der Verteilung des Gesamtschadens  $S$ , sondern ausschließlich von der Art und Höhe der Transaktionskosten ab.

Stop-Loss- oder Quoten-Rückversicherung sind nicht die, aus der Sicht der Erstversicherer, zu bevorzugende Rückversicherungsformen.

Die Transaktionskosten enthalten sowohl die, durch die Rückversicherung bedingten Verwaltungskosten von Erst- und Rückversicherer, als auch den Schwankungszuschlag des Rückversicherers.

Die Verwaltungskosten werden dagegen eher volumenabhängig sein, also etwa proportional zum Erwartungswert der Schäden, allerdings mit einer von der Rückversicherungsform abhängenden Proportionalitätskonstanten und einer durch die Fixkosten bedingten Untergrenze.

Außerdem handelt es sich hierbei jeweils um die kalkulatorischen Kosten. Gemäß unserem Modell sind die Transaktionskosten aber wie folgt definiert:

$$k(R) = b(R) - E(R)$$

d.h. beinhalten zusätzlich zu den absichtlich einkalkulierten Verwaltungskosten und Schwankungszuschlag auch noch einen unbeabsichtigten Zu- oder Abschlag durch die Verschätzung bei  $E(R)$ .

Ausgehend von der vorgegebenen (Maximal-)Höhe der Transaktionskosten wird die Stop-Loss-Priorität  $a$  bzw. der Quoten-Selbstbehalt  $1 - q$  gerade so festgelegt, dass sich die gewünschte Höhe des Selbstbehaltsergebnisses ergibt. Normalerweise ist die Kostenfunktion  $k(R) = g(E(R))$  bzw.  $k(R) = h(\text{Var}(R))$  streng monoton wachsend in  $E(R)$  bzw.  $\text{Var}(R)$ , sodass aus den vorgegebenen Kosten unmittelbar und eindeutig der zugehörige Umfang  $E(R)$  bzw.  $\text{Var}(R)$  der Rückversicherungsabgabe berechnet werden kann. Und wegen der Monotonie der Kostenfunktion resultiert immer dann eine höhere Stop-Loss-Priorität bzw. ein höherer Quoten-Selbstbehalt und daher eine höhere Selbstbehaltswaranz, wenn man die mit der Rückversicherung verbundenen Kosten reduzieren will.

## Satz (Arrow)

Sind die Transaktionskosten  $k$  eine bei allen Rückversicherungsformen  $R = S - Q$  gleiche Funktion  $g$  des Erwartungswertes  $E(R)$ , d.h. gilt  $k(R) = g(E(R))$ , so ist gemäß dem Nutzenmodell die unlimitierte Stop-Loss-Rückversicherung optimal für den Erstversicherer.

Jede Branche wird getrennt behandelt. Angenommen, Erstversicherer möchte in mehreren oder allen getrennt rückversicherten Teilportefeuilles dieselbe Rückversicherungsform anwenden - sollte der Parameter, der den Umfang der Rückversicherung regelt, überall gleich hoch sein oder nicht.

Wenn die Teilportefeuilles voneinander unabhängig sind, können für diese Fragestellung weitgehend explizite Lösungen ermittelt werden.

## Satz (De Finetti, Bühlmann)

Werden mehrere voneinander unabhängige Teilportefeuilles  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq I$ , durch getrennte Quoten-Rückversicherung geschützt, so sind die Selbstbehaltsquoten  $c_i = Q_i/S_i$  gemäß dem Varianzmodell proportional zu

$$\frac{z_i \cdot E(S_i)}{\text{Var}(S_i)}$$

zu wählen, wenn die Transaktionskosten  $k(R_i) = z_i E(R_i)$  jeweils mit dem Faktor  $z_i$  proportional zum Erwartungswert des abgegebenen Schadens  $R_i$  sind.

Der Selbstbehaltsanteil  $c_i$  soll also umso **höher** sein, je teurer die Rückversicherung, gemessen durch  $z_i$ , ist und je größer das Portefeuille, gemessen durch  $E(S_i)$ , ist, und umso **kleiner**, je größer die Varianz des Portefeuilles ist.

Dieses Resultat ist sehr plausibel.

Sollten einzelne  $c_i \geq 1$  ausfallen, so werden die zugehörigen Teilportefeuilles nicht rückversichert.

## Satz (Bühlmann)

Werden mehrere voneinander unabhängige Teilportefeuilles  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq I$ , mit Einzelschadenhöhe  $X_i$  und davon unabhängiger, poissonverteilter Schadenanzahl durch getrennte, unlimitierte Schadenexzedenten-Rückversicherungen geschützt, so sollten deren Prioritäten  $a_i$  im Varianzmodell die implizite Gleichung

$$a_i = (k_1/2 + k_2 \cdot E(X_i - a_i | X_i > a_i)) / \beta$$

erfüllen, wenn die Transaktionskosten die Form

$$k(R_i) = z_i + k_1 E(R_i) + k_2 \text{Var}(R_i)$$

haben, und der Faktor  $\beta$  so gewählt wird, dass das vorgegebene Varianzniveau eingehalten wird.

Es gibt Risikoteilungsformen, die auf jeden Fall gemieden werden sollten, weil eine für beide Beteiligten bessere Alternative existiert. Ein Beispiel ist die *Integral-Franchise* (auf Jahresbasis):  
Ausgehend vom Jahresgesamtschaden  $S$  und einer vereinbarten Schadengrenze  $\underline{a}$  trägt der Erstversicherer

$$Q = \begin{cases} S & \text{falls } S \leq \underline{a}, \\ 0 & \text{falls } S > \underline{a} \end{cases}$$

und der Rückversicherer trägt  $R = S - Q$ , d.h. er übernimmt den vollen Schaden, wenn er höher als die Grenze  $\underline{a}$  ist.

## Satz

Zu jeder Integralfranchise  $Q + R = S$  mit Schadengrenze  $\underline{a}$  gibt es einen unlimitierten Stop-Loss  $Q_a + R_a = S$ ,  $Q_a = \min(S, a)$ , mit Priorität  $a < \underline{a}$  und gleichen Erwartungswerten  $E(Q_a) = E(Q)$ ,  $E(R_a) = E(R)$ , aber niedrigeren Varianzen  $Var(Q_a) < Var(Q)$ ,  $Var(R_a) < Var(R)$ .

Für Erst- und Rückversicherer, die nach dem Varianzmodell entscheiden, ist die Integral-Franchise keine empfehlenswerte Risikoteilung, da es eine für beide Seiten bessere Form der Risikoteilung gibt, nämlich den Stop-Loss (bzw. die Abzugsfranchise).

Unter der Voraussetzung, dass die Transaktionskosten nur von Erwartungswert und Varianz des Rückversicherungsschadens abhängen.

Werden die Transaktionskosten z.B.: gemäß  $k(R) = k_0 + k_1 E(R) + k_2 \text{Var}(R)$  berechnet, so ergibt der Stop-Loss sowohl eine niedrigere Selbstbehaltsvarianz wie auch niedrigere Transaktionskosten (falls  $k_2 > 0$ ) als die Integral-Franchise.

Risikoteilungsformen, zu denen es keine Alternative gibt, bei der sich wenigstens eine Seite besser stellt, ohne dass die andere sich verschlechtert, heißen *pareto-optimal*. Die Integralfranchise ist im Varianzmodell also **nicht** pareto-optimal.

Bei pareto-optimalen Rückversicherungsformen geht jede Verbesserung zu Gunsten des Erstversicherers zu Lasten des Rückversicherers und umgekehrt.

## Satz

Zu jeder Rückversicherungsform  $\underline{Q} + \underline{R} = S$ , bei der  $\underline{Q}$  und  $\underline{R}$  keine Funktionen des Jahresgesamtschadens  $S$  sind, sondern von den Einzelschäden abhängen, gibt es eine Rückversicherungsform  $Q + R = S$ , bei der  $Q$  und  $R$  Funktionen von  $S$  sind, und derart, dass  $E(Q) = E(\underline{Q})$ ,  $E(R) = E(\underline{R})$  und  $Var(Q) < Var(\underline{Q})$ ,  $Var(R) < Var(\underline{R})$  gilt.

*Korollar:* Eine Rückversicherungsform, die sich nicht als Funktion des Jahresgesamtschadens darstellen lässt, ist im Varianzmodell nicht pareto-optimal.

Die zur Berechnung von  $E(Q|S = s)$  erforderlichen Schadenzahl- und Schadenhöhenwahrscheinlichkeiten pro Risiko in den Zweigen der Schadenversicherung können allenfalls approximativ ermittelt werden.

Nur in der Lebens- oder Unfalltod-Versicherung erscheint es möglich, dass sich beide Seiten auf die erforderlichen Rechnungsgrundlagen einigen. Daher können Summen- und Schadenexzedneten-Rückversicherung weiterhin ihren Platz in der Versicherungspraxis beanspruchen.

Ebenso sind die im vorigen Abschnitt behandelten Abstaffelungen des Selbstbehalts nicht pareto-optimal, d.h. können theoretisch noch weiter verbessert werden durch eine Rückversicherungsform, die nur vom Gesamtschaden aller betrachteten Teilportefeuilles abhängt.

Eine pareto-optimale Rückversicherungsform muss notwendigerweise als Funktion des Jahresgesamtschadens darstellbar sein. Doch dies allein ist nicht hinreichend, wie das Beispiel der Integralfranchise (auf Jahresbasis) zeigt. Der folgende Satz charakterisiert die pareto-optimalen Rückversicherungsformen.

## Satz (Pesonen)

Eine Rückversicherungsform  $Q + R = S$  ist im Varianz- oder Nutzenmodell genau dann pareto-optimal, wenn Selbstbehaltsschaden  $Q$  und Rückversicherungsschaden  $R$  monoton nicht fallende Funktionen des Jahresgesamtschadens  $S$  sind.

Aus dem Satz folgt unmittelbar, dass Quote und Stop-Loss pareto-optimal sind, da  $Q$  und  $R$  jeweils monoton nicht fallende Funktionen von  $S$  sind. Dagegen ist bei der Integralfranchise (auf Jahresbasis) der Selbstbehaltsschaden  $Q$  nicht monoton nichtfallend, was erneut zeigt, dass die Integralfranchise nicht pareto-optimal ist.

Optimale Rückversicherungsform für Erstversicherer ist nicht ermittelbar. In der Praxis orientiert man sich daher oft an der jeweils dominierenden Komponente des versicherungstechnischen Risikos, d.h. an Zufalls- bzw. Änderungsrisiko. Sie spielen nämlich in den einzelnen Versicherungssparten in der Regel eine unterschiedliche Rolle.

Gegen das Zufallsrisiko aus einzelnen Großschäden schützen am Besten der Summenexzedent und der Schadenexzedent. Bei Kumulierung vieler Schäden aus einem Ereignis entlastet natürlich der Kumulschadenexzedent am meisten. Dem Änderungsrisiko, das sich auf alle Schäden auswirkt, kann offensichtlich durch Quote oder Stop-Loss am besten begegnet werden. In den Sparten, wo beide Komponenten des versicherungstechnischen Risikos eine Rolle spielen, werden häufig mehrere Rückversicherungsformen miteinander kombiniert („Rückversicherungsprogramm“).

Rückversicherung

Risikoteilung

Modelle zur Bewertung von Risikoteilungen

Einseitige Optimierung bei gegebenen Transaktionskosten

Abstaffelung des Selbstbehalts

Suboptimale und pareto-optimale Risikoteilung

Fazit

# Danke!