Extremwerttheorie

Clemens Grünwald

25. Juni 2009

- stochastische Größen $X_1, \ldots, X_n$ iid
- stehen für finanzielle Verluste (z.B. betriebswirtschaftliche Verluste, Versicherungsverluste oder Verluste aus einem Kreditportfolio)
- kann man irgendwelche Aussagen über die Block-Maxima $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ tätigen?

Zentrale Grenzverteilungssatz

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ iid mit } Var(X_i) < \infty \ \forall i \in \mathbb{N} \text{ und } S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} P\left(\frac{S_n - n\mathbb{E}(X)}{\sqrt{nVar(X)}} \leq x\right) = \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Maximum Domain of Attraction

- $P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) = F^n(x)$.
- Es stellt sich die Frage, ob Folgen (d_n) und $(c_n) > 0$ existieren, sodass:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = \lim_{n\to\infty} F^n(c_n x + d_n) = H(x),$$

- Existiert so ein $H(x)$, so schreibt man $F \in MDA(H)$.

Theorem von Fisher-Tippett und Gnedenko

Das **Theorem von Fisher-Tippett und Gnedenko** besagt, dass aus $F \in MDA(H)$ folgt, dass $H(x)$ eine verallgemeinerte Extremwertverteilung (generalized extreme value (GEV) distribution)ist.

GEV

Definition

Die Verteilungsfunktion einer verallgemeinerten Extremwertverteilung ist gegeben durch:

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp(-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}), & \xi \neq 0 \\ \exp(-e^{-x}), & \xi = 0 \end{cases}$$

für $1 + \xi x > 0$.

Man kann aus $H_{\xi,\mu,\sigma} := H_\xi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ leicht eine drei-parametrige Familie gewinnen, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ der Lageparameter, $\sigma > 0$ der Skalierungsparameter und ξ der Formparameter genannt wird.

Verteilungstypen

- bei $\xi > 0$: **Frechetverteilung**.
- bei $\xi = 0$: **Gumbelverteilung**.
- bei $\xi < 0$: **Weibullverteilung**.
- für ein festes x ist die GEV stetig bezüglich ξ (d.h. $\lim_{\xi \to 0} H_\xi(x) = H_0(x)$).

- Die Weibullverteilung ist die einzige der drei Verteilungen, für die x_F endlich ist.
- Wenn die Verteilung des normalisierten Maximums konvergiert, dann ist der Typ der Grenzverteilung eindeutig bestimmt.
- Der Lage- und Skalierungsparamter der Grenzfunktion hängen jedoch von den exakten Folgen c_n und d_n ab. Man kann die Folgen immer so wählen, dass die Grenzverteilung die Stammform H_ξ besitzt.

Beispiel

Exponentialverteilung:

$$F(x) = 1 - \exp(-\beta x), \quad \beta > 0, x \geq 0 \qquad c_n = \frac{1}{\beta},\ d_n = \ln\left(\frac{n}{\beta}\right)$$

$$\Rightarrow F^n(c_n x + d_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\exp(-x)\right)^n, \quad x \geq -\ln(n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} F^n(c_n x + d_n) = \exp(-e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow F \in MDA(H_0)$$

- $\min(X_1, \ldots, X_n) = -\max(-X_1, \ldots, -X_n)$
- sei $\widetilde{F} = 1 - F(-x)$ die Verteilungsfunktion von $-X_1, \ldots, -X_n$
- sei $\widetilde{F} \in MDA(H_\xi)$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} P\left(\frac{\max(-X_1, \ldots, -X_n) - d_n}{c_n} \leq x\right) = H_\xi(x).$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} P\left(\frac{\min(X_1, \ldots, X_n) + d_n}{c_n} \leq x\right) = 1 - H_\xi(-x),$$

- im symmetrischen Fall $\widetilde{F}(x) = F(x)$ gilt, dass wenn H_ξ der Typ der Grenzverteilung fürs Maximum ist, daraus folgt, dass $1 - H_\xi(-x)$ der Typ der Grenzverteilung des Minimums ist.

Definition

Eine positive, Lebesque-messbare Funktion $L(x)$ auf $(0, \infty)$ variiert langsam wenn gilt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1, \qquad \forall t > 0.$$

- Lassen sich Aussagen tätigen, wann $F \in MDA(H_\xi)$?

Frechetverteilung ($\xi > 0$)

$$F \in MDA(H_\xi) \Leftrightarrow 1 - F(x) = x^{-\frac{1}{\xi}} L(x),$$

wobei $L(x)$ eine Funktion ist, die langsam variiert.

- z.B. die Pareto-, die Burr- und die Student-Verteilung
- in der Extremwerttheorie am meist untersuchten Verteilungen
- sie sind besonders interessant für finanzielle Anwendungen

Gumbelverteilung ($\xi = 0$)

- Charakterisierung in diesem Fall nicht so einfach
- z.B. die Exponentialverteilung, sowie die Normal- oder die Lognormalverteilung
- für finanzielle Modelle auch oft von Interesse

Weibullverteilung($\xi < 0$)

$$F \in MDA(H_\xi) \Leftrightarrow x_F < \infty \wedge 1 - F(x_F - x^{-1}) = x^{\frac{1}{\xi}} L(x),$$

wobei $L(x)$ eine Funktion ist, die langsam variiert.

- die wohl unwichtigste Klasse für finanzielle Modellierungen, da $x_F < \infty$. In der Praxis sind zwar alle möglichen Finanz- und Versichernugsverluste beschränkt, doch bei Modellierungen geht man lieber von unbeschränkten Verlusten aus.
- z.B. Gleichverteilung oder Betaverteilung

- sei $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ein strikt stationärer stochastischer Prozess und $(\tilde{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid mit mit der selben Verteilungsfunktion F, dann existiert meistens ein $\theta \in (0,1]$, sodass

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\tilde{M}_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = H_\xi(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = H_\xi^\theta(x).$$

- Wir nennnen θ den Extremal-Index des Prozesses.
- $H_\xi^\theta(x)$ ist vom selben Verteilungstypen wie $H_\xi(x)$, und hat daher den selben Formparamter ξ, jedoch nicht den selben Skalierungs- oder Lageparamter.

- Wir teilen die Daten in m Blöcke der Größe n, bezeichnen das Block-Maximum des j-ten Blocks mit M_{nj} und erhalten somit unsere Daten $M_{n1}, \ldots, M_{nm}$.
- Dichte einer verallgemeinerten Extremwertverteilung :

$$h_{\xi, \mu, \sigma} = \frac{1}{\sigma} e^{-\left(1+\xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}} \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}$$

die Loglikelihood

$$l(\xi, \mu, \sigma; M_{n1}, \ldots, M_{nm}) = \sum_{i=1}^{m} \ln h_{\xi,\,\mu,\,\sigma}(M_{ni})$$

$$= -m \ln \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^{m} \ln \left(1 + \xi \, \frac{M_{ni} - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^{m} \left(1 + \xi \, \frac{M_{ni} - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

Die Parameter erhält man nun durch Maximierung dieser Funktion.
Wahl von m und somit auch indirekt von die von n wichtig!

Excess-Verteilung

Definition

Sei X eine stochastische Größe mit Verteilungsfunktion F, dann ist die Excess-Verteilung über einen Schwellwert u gegeben durch:

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | \, X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}, \qquad 0 \leq x < x_F - u.$$

Definition

Die Mean-Excess-Funktion ist gegeben durch:

$$e(u) = \mathbb{E}(X - u | \, X > u).$$

Verallgemeinerte Paretoverteilung

Definition

Die Verteilungsfunktion einer verallgemeinerte Paretoverteilung (GPD)ist gegeben durch:

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x/\beta)^{\frac{-1}{\xi}}), & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x/\beta), & \xi = 0 \end{cases}$$

für $\beta > 0$ und $x \geq 0$ wenn $\xi \geq 0$ und $0 \leq x \leq -\beta/\xi$ wenn $\xi < 0$.

Auch hier wird ξ der Formparameter, sowie β der Skalierungsparameter genannt.

Verteilungstypen

- bei $\xi > 0$: gewöhnliche Paretoverteilung mit den Parametern $\alpha = \frac{1}{\xi}$ und $\kappa = \frac{\beta}{\xi}$
- bei $\xi = 0$: Exponentialverteilung
- bei $\xi < 0$: Typ 2 Paretoverteilung
- auch die GPD ist für ein festes x stetig bezüglich ξ (d.h. $\lim\limits_{\xi \to 0} G_{\xi,\,\beta}(x) = G_{0,\,\beta}(x)$).
- weiters gilt, dass $G_{\xi,\beta} \in MDA(H_\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ und, dass $\mathbb{E}(X) = \frac{\beta}{(1-\xi)}$ für $\xi < 1$.

Das Theorem von Pickhands-Balkema-de Haan

Man kann eine postive, messbare Funktion $\beta(u)$ finden, sodass

$$\lim_{u \to x_F} \sup_{0 \leq x < x_F - u} \left| F_u(x) - G_{\xi,\, \beta(u)}(x) \right| = 0$$

genau dann, wenn $F \in MDA(H_\xi)$, mit $\xi \in \mathbb{R}$.

Wir wollen nun für diesen Abschnitt auf Grund der gerade gezeigten Konvergenz folgende Annahme treffen:

Sei F eine Verlustfunktion mit rechtem Endpunkt x_F, dann gilt $F_u(x) = G_{\xi,\,\beta}(x)$ für $0 \leq x < x_F - u$, $\xi \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$.

Maximum-Likelihood-Methode

- n unabhängige Verlustdaten von F
- die Zufallszahl N_u beschreibt die Anzahl derer, die die Schranke u überschritten haben
- über $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_{N_u}$ erhält man die Höhe des Verlustes über der Schranke $Y_i = \widetilde{X}_i - u$
- Dichte der verallgemeinerten Paretoverteilung:

$$g_{\xi,\beta} = \beta \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\left(1+\frac{1}{\xi}\right)}$$

die Loglikelihood

$$l(\xi, \beta; Y_1, \ldots, Y_{N_u}) = \sum_{i=1}^{N_u} \ln g_{\xi,\beta}(Y_i) =$$

$$-N_u \ln \beta - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^{N_u} \ln \left(1 + \xi \frac{Y_i}{\beta}\right),$$

Die Parameter erhält man wiederum durch Maximierung dieser Funktion.

Überschreitung einer höheren Schranke

Gehen wir weiter von der Annahme $F_u(x) = G_{\xi,\,\beta}(x)$ aus, so folgt für eine höhere Schranke $v \geq u$, dass
$F_v(x) = G_{\xi,\,\beta+\xi(v-u)}(x)$.

Man sieht, dass die Excess-Funktion einer höheren Schranke eine verallgemeinerte Paretoverteilung mit dem selben Formparamter ξ bleibt, jedoch der Skalierunsparamter β linear ansteigt.

der Tail einer Verteilung

Wir wollen nun auf bereits gezeigtes zurückgreifen um $\bar{F}(x)$ für $x \geq u$ zu erhalten.
Unter Beibehaltung unserer Annahme erhalten wir:

$$\bar{F}(x) = P(X > u)P(X > x|\, X > u)$$

$$= \bar{F}(u)P(X - u > x - u|\, X > u)$$

$$= \bar{F}(u)\bar{F}_u(x - u) = \bar{F}(u)\left(1 + \xi\frac{x - u}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

Vorgehensweise in der Praxis

- $\bar{F}(u)$ wird durch $\frac{N_u}{u}$ geschätzt und die Parameter ξ und β werden durch die Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\xi}$ und $\hat{\beta}$ ersetzt
- man erhält somit einen Schätzer für $\bar{F}(x)$:

$$\hat{\bar{F}}(x) = \frac{N_u}{n}\left(1 + \hat{\xi}\frac{x-u}{\hat{\beta}}\right)^{-1/\hat{\xi}}$$

- nehmen wir an, dass $F \in MDA(H_\xi)$ mit $\xi > 0$ (Frechetverteilung) und daher

$$\bar{F}(x) = L(x)x^{-\alpha}$$

gilt, wobei $L(x)$ langsam varriert.

- wir verwenden die Mean-Excess Funktion der logarithmierten Daten:

$$e^*(\ln u) = \mathbb{E}(\ln(X) - ln(u) | \ln(X) > \ln(u))$$

$$= \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_u^\infty (\ln(x) - \ln(u))\, dF(x) = \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_u^\infty \frac{\bar{F}(x)}{x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_u^\infty L(x)x^{-(\alpha-1)} dx$$

der Hill-Schätzer

- man erhält so aus dem Theorem von Karamata für $u \to \infty$:

$$e^*(\ln u) \sim \frac{L(u)\, u^{-\alpha}\alpha^{-1}}{\bar{F}(u)} = \alpha^{-1},$$

- durch einen Schätzer für die Mean-Excess-Funktion:

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - u)\mathbb{I}_{\{X_i>u\}}}{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{X_i>u\}}}.$$

- erhalten wir durch eine kleine Abänderung den Hill-Schätzer:

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} = \left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\ln(X_{j,n}) - \ln(X_{k,n})\right)^{-1}, \qquad 2 \le k \le n.$$

mit $X_{n,n} \le \cdots \le X_{1,n}$ und $e_n^*(\ln X_{k,n}) \approx \alpha^{-1}$

Schätzer für $\bar{F}(x)$ durch den Hill-Schätzer

- Annahme: $\bar{F}(x) = Cx^{-\alpha},\ x \geq u > 0,$
- α wird durch den Hill-Schätzer $\hat{\alpha}^{(H)}$ ersetzt und die Schranke u wird durch $X_{k,n}$ ersetzt
- C wird folgendermaßen ausgedrückt: $C = u^{\alpha}\bar{F}(u)$
- $\bar{F}(u)$ wird durch $\frac{k}{n}$ ersetzt

$$\Rightarrow \hat{\bar{F}}(x) = \frac{k}{n}\left(\frac{x}{X_{k,n}}\right)^{-\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)}}$$

- bisher:
  wurde die Höhe des Verlustes über einer bestimmten Schranke betrachtet
- jetzt:
  die Überschreitung der Schranke wird als Ereignis in der Zeit betrachtet und Zählprozesse werden genützt, um die Häufigkeit dieses Ereignisses zu modellieren

Definition

Man nennt einen stochastischen Prozess (ϵ_t) ein weißes Rauschen, wenn

- $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$,
- $\mathbb{E}(\epsilon_t^2) < \infty$ und
- $\mathbb{E}(\epsilon_{t+k}\epsilon_t) = 0 \quad \forall k \neq 0$

für alle t erfüllt ist.

Wobei wir hier zusätzlich die Unabhängigkeit und die identische Verteilung vorraussetzen, daher $(\epsilon_t) \sim IID(\sigma^2)$.

Wendet man auf die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} F^n(c_n x + d_n) = H_\xi(x)$$

den natürlichen Logarithmus an, so erhält man

$$\lim_{n\to\infty} n \ln(1 - \bar{F}(c_n x + d_n)) = \ln H_\xi(x),$$

wodurch man weiters unter Verwendung der Beziehung $\ln(1-y) \sim -y$ für $y \to 0$ die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(c_n x + d_n)) = -\ln H_\xi(x)$$

für ein fixes x erhält.

- sei $u_n(x) := c_n x + d_n$ eine Folge von Schranken
- Die Anzahl von n Verlusten $X_1, \ldots, X_n$, die die Schranke $u_n(x)$ überschreiten, ist nun Binomialverteilt, $N_{u_n(x)} \sim B(n, \bar{F}(u_n(x)))$, mit Mittelwert $n\bar{F}(u_n(x))$.
- Auf Grund des Zusammenhangs zwischen Binomialverteilung und Poissonverteilung, folgt daraus, dass für $n \to \infty$ $N_{u_n(x)}$ gegen eine Poissonverteilung mit Mittelwert $\lambda(x) = -\ln H_\xi(x)$ konvergiert, abhängig vom fixierten x.

Zählprozess

Definition

Für eine Folge von Zufallszahlen oder Zufallsvektoren $Y_1, \ldots, Y_n$ in einem Zustandsraum X (zum Beispiel $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^2$) und für jede Teilmenge $A \subset X$ nennen wir

$$N(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{Y_i \in A\}}$$

einen Zählprozess.

Poissonzählprozess

Ein Zählprozess $N(\cdot)$ wird ein Poissonzählprozess auf X mit Mittelwertfunktion Λ genannt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

- Für $A \subset X$ und alle $k \geq 0$ gilt:

$$P(N(A) = k) = \begin{cases} e^{-\Lambda(A)} \frac{\Lambda(A)^k}{k!}, & \Lambda < \infty \\ 0, & \Lambda = \infty. \end{cases}$$

- Für alle $m \geq 1$ und für alle paarweise disjunkten Mengen $A_1, \ldots, A_m \subset X$ sind die Zufallszahlen $N(A_1), \ldots, N(A_m)$ unabhängig.

Für einen Poissonprozess $N(\cdot)$ gilt, dass $\mathbb{E}(N(A)) = \Lambda(A)$.
Man nennt $\lambda(x)$ die Intensität und es gilt, dass $\int_A \lambda(x)\, dx = \Lambda(A)$.

- striktes weiße Rauschen $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$
- Folge von Schranken $u_n(x) = c_n x + d_n$ für ein fixes x
- Sei $Y_{i,\,n} = \left(\frac{i}{n}\right) \mathbb{I}_{\{X_i > u_n(x)\}}$ für $1 \leq i \leq n$;
  $Y_{i,\,n}$ geben entweder die "normierte Zeit" oder Null zurück
- Der Zählprozess $N(\cdot)$, der die Überschreitungen über die Schranke $u_n(x)$ in einem normierten Zeitraum zählt, ist für den Zustandsraum $X = (0, 1]$ durch

  $$N_n(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{Y_{i,\,n} \in A\}}$$

  für alle $A \subset X$ gegeben.
  Für $n \to \infty$ erhält man einen homgenen Poissonprozess mit $\lambda(x) = -\ln H_\xi(x)$.

Das POT-Modell macht folgende Annahmen:

- Überschreitungen folgen in der Zeit einem homogenen Poissonprozess.
- Die Höhe der Überschreitungen über eine Schranke sind unabhängig sowie identisch verteilt und sie sind unabhängig von den Überschreitungszeiten.
- Die Verteilung der Höhe der Überschreitung ist eine verallgemeinerte Paretoverteilung.

- Zwei-dimensionaler Poissonprozess, bei dem die Punkte (t, x) für Zeitpunkt und Höhe der Grenzüberschreitung stehen
- Wir nehmen an, dass der auf dem Zustandsraum $X = (0, 1] \times (u, \infty)$ definierte Zählprozess $N(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{(\frac{i}{n}, X_i) \in A\}}$ ein Poissonprozess ist, dessen Intesität durch

$$\lambda(t,\, x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi\, \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi} - 1}$$

für $\left(1 + \xi\, \frac{x-\mu}{\sigma}\right) > 0$, und $\lambda(t,\, x) = 0$ sonst, gegeben ist.

- Wir erhalten somit für die Menge $A = (t_1, t_2) \times (x, \infty) \subset X$ die Mittelwertfunktion:

$$\Lambda(A) = \int_{t_1}^{t_2} \int_x^{\infty} \lambda(y)\, dy\, dt = -(t_2 - t_1) \ln H_{\xi,\,\mu,\,\sigma}(x).$$

- Es folgt daraus, dass für ein $x \geq u$ der implizierte ein-dimensionale Prozess von Überschreitungen der Schranke x ein homogener Poissonprozess mit Intensität $\tau(x) := -\ln H_{\xi,\,\mu,\,\sigma}(x)$ ist.

- Die Wahrscheinlichkeit des Tails einer Excess-Funktion $\bar{F}_u(x)$ kann als Quotient der Intensitäten von $u + x$ und x angesehen werden:

$$\bar{F}_u(x) = \frac{\tau(u+x)}{\tau(u)} = \left(1 + \frac{\xi x}{\sigma + \xi(u-\mu)}\right)^{-\frac{1}{\xi}} = \bar{G}_{\xi,\beta}(x)$$

mit dem Skalierungsparameter $\beta = \sigma + \xi(u - \mu)$.

- Man betrachte das Ereignis $\{M_n \leq x\}$ für ein $x \geq u$, das bedeutet, dass in der gesamten Zeit kein Wert über x eintritt, und somit der Zählprozess gleich Null für die Menge $A = (0,1] \times (x, \infty)$. Man erhält:

$$P(M_n \leq x) = P(N(A) = 0) = \exp(-\Lambda(A)) = H_{\xi,\mu,\sigma}(x).$$

- kürzlich eingetretene Serie von Überschreitungen erhöht das Risiko einer neuerlichen Überschreitung
- Hauptanwendung: traditionell bei der Modellierung von Erdbeben und deren Nachbeben
- jedoch auch zur Modellierung von Einbrüchen auf den Finanzmärkten nützlich

- Daten $X_1, \ldots, X_n$ und eine Schranke u
- $\{(i, X_i) \ : \ 1 \leq i \leq n, \ X_i > u\}$ in $\{(T_j, \tilde{X}_j) \ : \ j = 1, \ldots, N_u\}$ umgeschrieben
- Zufallszahl $Y_i = i\mathbb{I}_{\{X_i > u\}}$ gibt den Zeitpunkt der Überschreitung zurück, sofern sie überhaupt stattfindet
- Der Zählprozess der Überschreitungen $N(\cdot)$ mit dem Zustandsraum $X = (0, n]$ ist durch $N(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{Y_i \in A\}}$ für ein $A \subset X$ gegeben.

- Wir nehmen an der Zählprozess $N(\cdot)$ sei ein self-exciting Prozess mit bedingter Intensität

$$\lambda^*(t) = \tau + \psi \sum_{j:0<T_j<t} h(t - T_j, \tilde{X}_j - u)$$

wobei $\tau > 0$, $\psi \geq 0$ und h eine positive Funktion ist.
- Jede vorherige Überschreitung $(T_j, \tilde{X}_j)$ spielt in die bedingte Dichte mit ein, einerseits spielt die Zeit wie lange die Überschreitung her ist $(t - T_j)$, andererseits die Höhe der Überschreitung $(\tilde{X}_j - u)$ hier mit ein.

2 Beispiele für h

- $h(s,x) = e^{(\delta x - \gamma s)}$, mit $\delta, \gamma > 0$, oder
- $h(s,x) = e^{(\delta x)}(s+\gamma)^{-(\rho+1)}$, mit $\delta, \gamma, \rho > 0$.

Danke für die Aufmerksamkeit!