Schadenreservierung

bei lang andauernder Schadenabwicklung

Präsentation für das Seminar aus
Finanz- & Versicherungsmathematik
SS09

Claudia Stögerer

30. April 2009

Ursachen

- Späte Manifestation
  IBNR-Schadenreserve
  (incurred but not reported)

- Lange Regulierungsdauer
  RBNS-Schäden
  (reported but not settled)
  IBNER-Schadenreserve
  (incurred [and reported] but not enough reserved)

Spätschadenreserve

Einzellfallreserven + Spätschadenreserve = Schadenreserve

Eine gute Schätzung der Schadenreserve wird für die externe Rechnungslegung und die Prämienkalkulation benötigt.

IBNR-Reserve für Prämienkalkulation, externe Erfolgsrechnung
IBNER-Reserve für Prämienkalkulation, interne Erfolgsrechnung

Schadenexzendenten-Rückversicherung:
Große Problematik: Erstversicherer weiß am Ende des Abrechnungsjahres nocht nicht, welche Schadensummen den gestellten Betrag überschritten haben. → IBNR-Schäden für Rückversicherer

- viele mathematische Schätzverfahren
- mit früheren Erfahrungen aus den Anfallsjahren auf zukünftige Anfallsjahre schließen
- Problem bei Trend- & Struktureinbrüchen

Abwicklungsdreieck

Abwicklungsjahre k

Anfallsjahr i

$$
\begin{array}{ccccccccc}
S_{1,1} & S_{1,2} & \dots & S_{1,k} & \dots & S_{1,I+1-i} & \dots & S_{1,I-1} & S_{1,I} \\
S_{2,1} & S_{2,2} & \dots & S_{2,k} & \dots & S_{2,I+1-i} & \dots & S_{2,I-1} & \\
\vdots & & & & & & \vdots & & \\
S_{i,1} & S_{i,2} & \dots & S_{i,k} & \dots & S_{i,I+1-i} & & & \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \\
S_{I+1-k,1} & S_{I+1-k,2} & \dots & S_{I+1-k,k} & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & & & & \\
S_{I-1,1} & S_{I-1,2} & & & & & & & \\
S_{I,1} & & & & & & & &
\end{array}
$$

$$S_{i,+} = S_{i,1} + S_{i,2} + \ldots + S_{i,I}$$

- Aufzuwendender Gesamtschaden für das Anfalljahr i
- Alle Schäden bekannt und reguliert (nach I Jahren)
- Für Prämienkalkulation

$$S_{i,1} + S_{i,2} + \ldots + S_{i,I+1-i}$$

- Nach $I + 1 - i$ Jahren
- Noch nicht alle Schäden reguliert

$$R_i = S_{i,I+2-i} + S_{i,I+3-i} + \ldots + S_{i,I}$$

- R_i möglichst gut schätzen
- Erforderlicher Betrag für die Spätschadenreserve

Datenarten

- Bezahlte Schadenbeträge (ohne Einzelfallreserven)
  $+$ keine Schätzungen
  $-$ große Abwicklungsdreiecke (lange Regulierungsdauer)

- Angefallene Schadenbeträge (inkl. bestehender Einzelfallreserven)
  $+$ Größenordnung des Endschadens $C_{i,I}$ früher erkennbar
  $+$ kleine Abwicklungsdreiecke

Allgemeines

◇ Endschaden des Anfallsjahres i:
additiv: $C_{i,I} = S_{i,1} + S_{i,2} + \ldots + S_{i,I}$
multiplikativ: $C_{i,I} = C_{i,1} \cdot F_{i,1} \cdot F_{i,2} \cdot \ldots \cdot F_{i,I-1}$ mit $F_{i,k} = \frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}$

◇ Unabhängiger Erwartungswert:
$\mathbb{E}(F_{i,k}) = f_k \qquad 1 \leq i \leq I \, , 1 \leq k \leq I-1$

◇ Schätzung von f_k mittels dem $C_{i,k}$-gewichteten arithmetischen Mittel:
$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k} \cdot F_{i,k}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k}} = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k}} \qquad 1 \leq k \leq I-1$

◇ Schätzung des Endschadens $C_{i,I}$:
$\hat{C}_{i,I} = C_{i,I+1-i} \cdot \hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1} \qquad 2 \leq i \leq I$

◇ Schätzung der Reserve $R_i = C_{i,I} - C_{i,I+1-i}$:
$\hat{R}_i = C_{i,I+1-i} \cdot (\hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1} - 1)$

Modellannahmen

(CL1) Es gibt Abwicklungsfaktoren $f_1, \ldots, f_{I-1}$ mit

$$\mathbb{E}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}\middle| C_{i,1}, \ldots, C_{i,k}\right) = f_k \qquad 1 \leq i \leq I, 1 \leq k \leq I-1, \text{ für } C_{i,k} > 0$$

oder gleichwertig mit

$$\mathbb{E}(C_{i,k+1} | C_{i,1}, \ldots, C_{i,k}) = C_{i,k} \cdot f_k$$

(CL2) Die Anfalljahre $C_{i,1}, \ldots, C_{i,I}, \quad 1 \leq i \leq I$, sind global unabhängig.

Sätze

Unter den Annahmen **CL1** und **CL2** gilt
$\mathbb{E}(C_{i,I}|D) = C_{i,I+1-i} \cdot f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1} \qquad 2 \leq i \leq I.$

Unter den Annahmen **CL1** und **CL2** sind die berechneten Schätzer $\hat{f}_k$ erwartungstreu und unkorreliert mit
$\mathbb{E}(\hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1}) = f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1}.$

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k} \cdot F_{i,k}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k}} \qquad \text{mit } F_{i,k} := 0 \text{ falls } C_{i,k} = 0$$

Allgemeines

Problimatische Stellen im Abwicklungsdreieck:

- Rechtes oberes Eck:
  Schätzer des letzten Abwicklungsfaktors f_{I-1} untypisch
- Linkes unteres Eck:
  Faktor $C_{I,1}$ beruht auf einem Beobachtungsjahr

Ersetzung des Reserveschätzers $\hat{R}_I$ durch den Durchschnitt aller bisher beobachteten Anfalljahre

$C_{I,1} := \frac{v_I \cdot \sum_{i=1}^{I} C_{i,I}}{\sum_{i=1}^{I} v_i}$

$\diamond$ Unplausible Erstjahresstände $C_{i,1}$ durch
$\hat{C}_{i,1} = \frac{C_{i,I+1-i}}{\hat{f}_1 \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-i}}$
ersetzen.

$\diamond$ Schätzer für mittlere Erstjahresschadenquote:
$\hat{q}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{I} C_{i,I+1-i}}{\sum_{i=1}^{I} \hat{f}_1 \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-i} \cdot v_i}$

Schätzung der Genauigkeit der Spätschadenreserve R_i

Mittlerer quadratischer Fehler (mean squared error):
$\mathrm{mse}(\hat{R}_i) = \mathbb{E}((R_i - \hat{R}_i)^2 | D)$

Umformen:
$$\mathrm{mse}(\hat{R}_i) = \underbrace{\mathbb{V}(R_i|D)}_{\text{Zufallsfehler}} + \underbrace{(\mathbb{E}(R_i|D) - \hat{R}_i)^2}_{\text{Schätzfehler}}$$

Annahme über die Varianz von $C_{i,k}$
(CL3) Es gibt Proportionalitätskonstanten $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_{I-1}^2$ mit

$$\mathbb{V}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}\middle| C_{i,1}, \ldots, C_{i,k}\right) = \frac{\sigma_k^2}{C_{i,k}}$$

$$1 \leq i \leq I, 1 \leq k \leq I-1 \text{ für } C_{i,k} > 0$$

oder gleichwertig mit

$$\mathbb{V}(C_{i,k+1} | C_{i,1}, \ldots, C_{i,k}) = C_{i,k} \cdot \sigma_k^2.$$

Schätzer für $\mathrm{mse}(\hat{R}_i)$

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{I-k-1} \cdot \sum_{j=1}^{I-k} C_{j,k} \left(\frac{C_{j,k+1}}{C_{j,k}} - \hat{f}_k \right)^2 \qquad 1 \leq k \leq I-2$$

$$\hat{\sigma}_{I-1}^2 = \min\left(\frac{\hat{\sigma}_{I-2}^4}{\hat{\sigma}_{I-3}^2}, \hat{\sigma}_{I-3}^2 \right)$$

Sätze

Unter den Annahmen **CL1**, **CL2** und **CL3** kann der mittlere quadratische Fehler des Reserveschätzers $\hat{R}_i$ durch
$s.e.(\hat{R}_i))^2 = \hat{C}_{i,I}^2 \cdot \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \cdot \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{j,k}} \right)$ geschätzt werden, wobei $\hat{C}_{i,k} = C_{i,I+1-i} \cdot \hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{k-1} \quad k > I+1-i$ der Schätzer für $C_{i,k}$ ist.

Unter den selben Annahmen und Bezeichnungen wie im vorigen Satz erhält man für den mittleren quadratischen Fehler der Gesamtreserve $\hat{R} = \hat{R}_2 + \ldots + \hat{R}_I$ den Schätzer

$$(s.e.(\hat{R}))^2 = \sum_{i=2}^{I} \left((s.e.(\hat{R}_i))^2 + \hat{C}_{i,I} \cdot \left(\sum_{j=i+1}^{I} \hat{C}_{j,I} \right) \cdot \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\frac{2 \cdot \hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2}}{\sum_{n=1}^{I-k} C_{n,k}} \right)$$

Allgemeines

(A) $\mathbb{E}(C_{i,k+1}) = \mathbb{E}(C_{i,k}) \cdot f_k \qquad 1 \leq i \leq I, 1 \leq k \leq I-1$
mit unbekannten positiven Parameter $f_i, \ldots, f_{I-1}$
(Chain-Ladder-Verfahren ist Spezialfall)

Jedes Modell, für das **A** gilt, erfüllt auch
(B) $\mathbb{E}(S_{i,k}) = x_i \cdot y_k \qquad 1 \leq i, k \leq I$
mit unbekannten Parametern $x_i, y_k > 0$ und $y_i + \ldots + y_I = 1$.
Umgekehrt ist auch jedes Modell der Art **B** zugleich ein Modell der Art **A**.

Vergleich

- $\hat{R}_{i,0} = x_i \cdot (y_{I+2-i} + \ldots + y_I)$ bleibt im Fall **B** unverändert, wenn verschiedene Daten aus der Verteilung simuliert werden.
- $\hat{R}_{i,I} = C_{i,I+1-i} \cdot (f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1} - 1)$ im Chain-Ladder-Verfahren ändert sich bei jeder Simulation.

Ein auf der Gammaverteilung beruhendes Verfahren

◇ Individuelles Modell:
$S_{i,k} = \sum_{n=1}^{v_i} R_{ikn}$

◇ Allgemeiner Ansatz (Formparameter $\alpha < 1$):
$\mathbb{E}(R_{ikn}) = x_i \cdot y_k \qquad 1 \leq n \leq v_i$
$\mathbb{V}(R_{ikn}) = \frac{(x_i \cdot y_k)^2}{\alpha}$

◇ Gammaverteilung (Formparameter $v_i \cdot \alpha$):
$\mathbb{E}(S_{i,k}) = v_i \cdot x_i \cdot y_k$
$\mathbb{V}(S_{i,k}) = \frac{v_i \cdot (x_i \cdot y_k)^2}{\alpha}$

Durch die Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{x}_i$ und $\hat{y}_k$ ergeben sich

- Endschaden:
  $\hat{C}_{i,I} = C_{i,I+1-i} + \hat{R}_i$
- Reserveschätzer:
  $\hat{R}_i = \sum_{k=I+2-i}^{I} v_i \cdot \hat{x}_i \cdot \hat{y}_k$

Weitere Methoden

- Ein Modell mit der modifizierten Poissonverteilung
- Ein Verfahren mittels der Methode der kleinsten Quadrate
- Ein auf der Inversen Gaußverteilung beruhendes Verfahren

Seperation von Kalenderjahreffekten

◇ Anfall- und Abwicklungsjahre sind voneinander unabhängig

◇ Kalenderjahreffekt wirkt sich auf beide

◇ Verdeutlichung mittels kreuzklassifiziertem Modell:
$\mathbb{E}(S_{i,k}) = x_i \cdot y_k, 1 \leq i, k \leq I$

◇ Mit konstantem jährlichem Inflationsfaktor $u > 1$:
$\mathbb{E}(\underline{S}_{i,k}) = x_i \cdot y_k \cdot u^{i+k-2} \qquad 1 \leq i, k \leq I$

◇ Umschreibung in kreuzklassifizierte Form:
$\mathbb{E}(\underline{S}_{i,k}) = (x_i \cdot u^{i-1}) \cdot (y_k \cdot u^{k-1})$

- Konstante Inflation u
- Nicht konstante Inflation u_j
  $\diamond \underline{S}_{i,k} = S_{i,k} \cdot u_{i+k}$
  $\diamond$ Ohne Inflation keine systematischen Anfall- bzw. Abwicklungsjahrunterschiede

Trennung von IBNR- und IBNER-Schäden

- Änderungsbetrag $S_{i,k} = C_{i,k} - C_{i,k-1}$ in $S_{i,k} = T_{i,k} + U_{i,k}$ zerlegen.
  - $T_{i,1} = 0$ (IBNER-Schäden)
  - $C_{i,1} = S_{i,1} = U_{i,1}$ (IBNR-Schäden)
- $U_{i,k}$ unabhängig von $U_{i,1}, \ldots, U_{i,k-1}$ und $T_{i,1}, \ldots, T_{i,k-1}$
  - $\mathbb{E}(U_{i,k}) = v_i \cdot m_k \quad 1 \leq i, k \leq I$ unbekannter Parameter m_k
  - $\mathbb{V}(U_{i,k}) = v_i \cdot s_k^2 \quad 1 \leq i, k \leq I$ unbekannter Parameter s_k
- $T_{i,k}$ unabhängig von $U_{i,k}$, aber abhänging von der vergangenen Schadenabwicklung
  - $\mathbb{E}(T_{i,k}|D_{i,k-1}) = C_{i,k-1} \cdot h_{k-1}$ unbekannter Parameter h_k
  - $\mathbb{V}(T_{i,k}|D_{i,k-1}) = C_{i,k-1} \cdot t_{k-1}^2$ unbekannter Parameter t_k
  - $D_{i,k-1}$: Gesamtheit aller Daten (Anfalljahr i bis inkl. $k-1$)

Modell für $C_{i,k}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(C_{i,k}|D_{i,k-1}) &= \mathbb{E}(C_{i,k-1} + T_{i,k} + U_{i,k}|D_{i,k-1}) \\ &= C_{i,k-1} \cdot (1 + h_{k-1}) + v_i \cdot m_k\end{aligned}$$

Unabhängigkeit der Daten verschiedener Anfalljahre:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(C_{i,k}|D) &= \mathbb{E}(C_{i,k}|D_i) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(C_{i,k}|D_{i,k-1})|D_i) \\ &= v_i \cdot m_k + \mathbb{E}(C_{i,k-1}|D_i) \cdot (1 + h_{k-1})\end{aligned}$$

◇ Mittlerer Endschaden ($g_k = 1 + h_k$):
$\mathbb{E}(C_{i,I}|D) = C_{i,I+1-i} \cdot g_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot g_{I-1} + \sum_{k=I+2-i}^{I} v_i \cdot m_k \cdot g_k \cdot \ldots \cdot g_{I-1}$

◇ Endschaden ($\hat{g}_k = 1 + \hat{h}_k$):
$\hat{C}_{i,I} = C_{i,I+1-i} \cdot \hat{g}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{g}_{I-1} + \sum_{k=I+2-i}^{I} v_i \cdot \hat{m}_k \cdot \hat{g}_k \cdot \ldots \cdot \hat{g}_{I-1}$

◇ Reserve:
$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,I} - C_{i,I+1-i}$

Danke für die Aufmerksamkeit!