Seminar aus Finanz- und Versicherungsmathematik

Spieltheorie und ihre Anwendung im Versicherungswesen

Thomas KOBLISCHKE

SS 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in die Spieltheorie

Die Spieltheorie ist ein Teilgebiet der Mathematik, das versucht strategische Situationen zu lösen und zu erklären, wobei der Erfolg des einzelnen nicht nur von den eigenen, sondern von den Handlungen anderer, der sogenannten „Mitspieler“, abhängt.
Ein Spiel im Sinne der Spieltheorie ist durch eine endliche Anzahl von Akteuren (den *Spielern*) gegeben, die entsprechend fester Regeln miteinander agieren und deren regelkonforme Aktionen bestimmte Konsequenzen für jeden einzelnen und für die Gesamtheit zur Folge haben, wobei in der Regel angenommen wird, dass sich die Spieler rational entscheiden und intellektuell nicht eingeschränkt sind. Unter der Rationalitätsannahme liefert die Spieltheorie mittels mathematischen Modellen klare Aussagen, wie sich die Akteure in einem solchen Spiel verhalten werden, welche Strategien sie also auswählen werden.
Ihr Ziel ist unter anderem optimales strategisches Verhalten, Koalitionsbildung, angemessene Verteilung von gemeinsamen Gewinnen, das Finden eines Gleichgewichts zwischen den Spielern und andere Konzepte zur Lösung von Konflikten.
Die Spieltheorie findet Anwendung in Politik- und Computerwissenschaften, der Biologie, im Operations Research sowie in einer Vielzahl von wirtschaftlichen Situationen, wie zum Beispiel Preisbildung, Marketing, Controlling. Damit liefert die Spieltheorie ein Werkzeug, um die richtigen übergeordneten strategischen Entscheidungen zu treffen.

1.1 Geschichte der Spieltheorie

Die Spieltheorie beschäftigt Mathematiker seit Beginn der Zeitrechnung, jedoch geht der erste allgemeine theoretische Ansatz zur spieltheoretischen Analyse wirtschaftlichen Verhaltens zurück ins Jahr 1944, mit der Veröffentlichung von **John von Neumanns** und **Oskar Morgensterns** *„Theory of Games and Economic Behavior“*, seitdem die Spieltheorie auch mehr Aufmerksamkeit genießt.
Im folgenden sind einige wichtige Eckdaten der geschichtlichen Entwicklung zusammengefasst:

- **0-500**: In Babylon wurde durch den Talmut, eine Sammlung von Gesetzen und Traditionen, das als eines der wichtigsten und umfassensten Werke des Judentums gilt, festgelegt, dass bei Tod eines mehrfach verheirateten Mannes die Frauen einen nach Prinzip der kooperativen Spieltheorie berechneten Anteil seiner Hinterlassenschaften erhielten.

- **1713**: **James Waldegrave** beschrieb in einem Brief, der im folgenden auch **Nicolas Bernoulli** erreichte, der sich selbst mit spieltheoretischen Problemen beschäftigte, die Lösung der 2-Personen-Version des Kartenspiels „Le Her“.

- **1838**: **Augustin Cournot** zeigte in *„Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth“* am Spezialfall eines Cournot´schen Duopols ein Lösungskonzept im Sinne des Nash-Gleichgewichts.

- **1927**: **Emile Borel** brachte mit seinem Werk *„Algebre et calcul des probabilites“* wichtige Erkenntnisse über *gemischte Strategien.*

- **1944**: **John Von Neumann** und **Oskar Morgenstern** veröffentlichten *„Theory of Games and Economic Behavior“*, was die Grundlage für die heutige Spieltheorie legte. Fokus des Werkes liegt auf kooperativer Spieltheorie.

- **1950**: **John Forbes Nash** zeigte die Existenz des *„Nash-Gleichgewichts“*.

- **1965**: **Reinhard Selten** beschrieb das *„teilspielperfekte Gleichgewicht“*, welches eine Verfeinerung des Nash-Gleichgewichts darstellt.

- **1967**: **John Harsanyi** entwickelte das Konzept der *vollständigen Information* und des *Bayes-Spiels.*

- **1994**: Nash, Selten und Harsanyi erhielten einen Nobelpreis für ihre Beiträge zur Spieltheorie.

Es folgten weitere Nobelpreise in den Jahren 1996 für **Wiliam Vickrey**, 2005 für **Robert Aumann** und **Thomas Schelling** für ihre Beiträge in der evolutionären Spieltheorie und im Jahr 2007 für **Leonid Hurwicz**, **Eric S. Maskin** und **Roger B. Myerson**.

1.2 Darstellungsformen

Wir haben schon erfahren was ein Spiel im Sinne der Spieltheorie ist. Nun verwendet man jedoch je nach Fokus der Untersuchung verschiedene Darstellungsformen:

1.2.1 Normalform

Ein Spiel mit endlich vielen Spielern, bei dem alle Spieler nur einmal und simultan mit den anderen ziehen, lässt sich mathematisch in der *Normalform* (auch *Normalformenspiel* oder *strategisches Spiel*) modellieren. Spiele in Normalform werden oft in einer Matrix zusammengefasst.

Definition 1.1: Ein Spiel $\Gamma = (N, S, U)$ in Normalform besteht aus

- einer endlichen Menge $N = \{1, \dots, n\}$ von $n > 0$ Spielern.
- der nichtleeren Menge der Strategien $S = \{S^1, \dots, S^n\}$, deren Einträge $S^i = \{s^i_1, \dots, s^i_{n_i}\}$ die möglichen Strategien für jeden Spieler $i \in N$ sind. Die Startegienkombination aller Spieler mit Ausnahme des i-ten bezeichnet man mit s^{-i}. Man verwendet daher auch $s = (s^i, s^{-i})$.
- den Vektor U einer Nutzenfunktion $U^i : S \to \mathbb{R}\ \forall i \in N$. Es gilt:
  $U = (U^1, \dots, U^n), \quad U^i(s) = U^i(s^1, \dots, s^n) = U^i(s^i, s^{-i})$
  Man spricht auch von der *Auszahlung* (*outcome*) oder dem *Gewinn* (*payoff*).

Jeder Spieler wählt somit eine Strategie, die ihm unter Berücksichtigung der Strategien der anderen einen möglichst großen Nutzen verschafft.

Beispiel 1.1 (Gefangenendilemma): Zwei Schwerverbrecher werden seperat voneinander verhört, jedoch kann man ihnen nur eine geringere Straftat nachweisen. Nun wird beiden folgendes Angebot gemacht: Gesteht einer von ihnen das Verbrechen, so bekommt dieser eine einjährige Gefängnisstrafe. Der andere kann jedoch dann der ganzen Tat überführt werden, und bekommt die volle Strafe von 9 Jahren. Die Gefangenen können sich absprechen, sie werden jedoch unabhängig voneinander nach ihrer Entscheidung befragt. Sagen beide Gefangenen gegeneinander aus, so wird ihnen der gute Wille angerechnet, und sie bekommen beide „nur“ 7 Jahre. Schweigen beide, beläuft sich die Strafe auf 3 Jahre Gefängnis.

Definition 1.2: Man sagt eine Strategienkombination $s^* = (s^{1*}, \dots, s^{n*})$ ist *dominant* gegenüber $s = (s^1, \dots, s^n)$, falls gilt $U^i(s^{i*}, s^{-i}) \geq U^i(s^i, s^{-i})$.

s^1/s^2	s_1^2	s_2^2
s_1^1	(-7,-7)	(-1,-9)
s_2^1	(-9,-1)	(-3,-3)

Tabelle 1: Normalformspiel als Bimatrix (Beispiel 1.1)

Definition 1.3: Eine Strategienkombination $s^* = (s^{1*}, \ldots, s^{n*})$, bei der jedes s^{i*} die Eigenschaft $U^i(s^{i*}, s^{-i}) \geq U^i(s^i, s^{-i})\ \forall i \in M, s = (s^i, s^{-i}) \in S$ besitzt, nennt man ein *Gleichgewicht in dominanten Strategien*.

Kann jeder Spieler seine optimale Strategie unabhängig davon wählen, wie sich die übrigen Spieler verhalten, dann nennt man dies ein Gleichgewicht in dominanten Strategien.

Definition 1.4: Eine Strategienkombination $s^* = (s^{1*}, \ldots, s^{n*})$ heißt *Nash-Gleichgewicht*, wenn gilt:

$$U^i(s^{i*}, s^{-i*}) \geq U^i(s^i, s^{-i*}) \quad \forall i \in M, s^i \in S^i$$

Satz 1.1: Jedes Gleichgewicht in dominanten Strategien ist auch ein Nash-Gleichgewicht.

Definition 1.5: Unter der *gemischten Strategie* des Spielers i mit der Strategienmenge $S^i = \{s_1^i, \ldots, s_{n_i}^i\}$ versteht man einen Vektor $\hat{s}^i = (\hat{s}_1^i, \hat{s}_2^i, \ldots, \hat{s}_{n_i}^i)^T$ mit $\sum_{j=1}^{n_i} \hat{s}_j^i = 1, \quad \hat{s}_j^i \geq 0$. $\hat{s}^i$ ist somit ein Wahrscheinlichkeitsmaß und gemischte Strategien bilden eine Verallgemeinerung der reinen Strategien.

Satz 1.2: Ein endliches Normalformspiel hat immer ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

1.2.2 Extensive Form

Bei der *extensiven Form* (oder *dynamischen Form*) werden Spiele betrachtet, die als Folge von Spielzügen gegeben sind, die in gewisser Reihenfolge von endlich vielen Spielern gemacht werden. Die Strategie eines Spielers lässt sich als Folge darstellen. Die einzelnen Folgenglieder sind jedoch Elemente aus der Aktionsmenge, die der Spieler am jeweiligen Entscheidungsknoten

wählen kann.
Anschaulich kann jedes solche Spiel graphentheoretisch als Baum (*Spielbaum*) dargestellt werden. Der Wurzelpunkt x_0 ist der Start des Spiels.

Definition 1.6: Ein Spiel in allgemeiner extensiver Form ist gegeben durch

- eine endlichen Menge $N = \{1, \ldots, n\}$ von $n > 0$ Spielern
- einen endlichen Spielbaum B mit Wurzelknoten x_0 und der Menge der terminalen Knoten T
- eine Zerlegung $E = K_1 + \ldots + K_n$ der Menge $E = K \setminus T$ der Entscheidungsknoten, die jedem Spieler seine Entscheidungsknoten zuordnet, wobei $K_1 = \{x_0\}$
- eine Auszahlungsfunktion $U : T \to \mathbb{R}^n$

Beispiel 1.2:

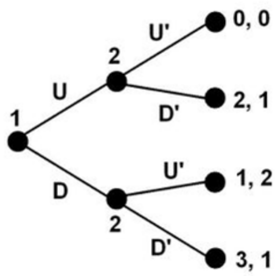

Abbildung 1: Spielbaum eines Spiels in extensiver Form

Satz 1.3: Jedes Spiel in extensiver Form kann auch in Normalform dargestellt werden.

Man unterscheidet zudem Spiele in extensiver Form nach der Information der Spieler beim Zug:
Ist jeder Spieler, der in einem Spiel am Zug ist, vollkommen darüber informiert, welche Züge bisher vorgenommen worden sind und außerdem über alle relevanten Charakteristika ihrer Mitspieler vollständig informiert, so spricht man von einem Spiel mit *vollständiger Information* (z.B. Schach).

1.2.3 Form einer charakteristischen Funktion

Definition 1.7: Ein n-Personen-Spiel Γ in *Form einer charakteristischen Funktion* ist ein Paar $[N, \nu]$, bestehend aus

- einer endlichen Menge $N = \{1, \ldots, n\}$ von n Spielern.
- einer reellwertigen charakteristischen Funktion ν auf 2^N.

Jede Teilmenge $S \subset N$ nennt man eine Koalition, wobei man N als große Koalition bezeichnet.

Definition 1.8: Eine *charakteristische Funktion* ν bezeichnet eine Funktion, die jeder Menge $S \subset N$ einen reellen Wert $\nu(S)$ zuordnet und für die gilt:

- $\nu(\emptyset) = 0$
- $\nu(S \cup T) \geq \nu(S) + \nu(T) \quad \forall S, T \subset N : S \cap T = \emptyset$ (**Superadditivität**)

Die charakteristische Funktion ist als Nutzenfunktion zu verstehen, die den Wert, bzw. die Macht, einer Koalition $S \in N$ misst, wenn ihre Mitglieder im Kollektiv agieren.

Definition 1.9: 2-Personen Spiele Γ und Γ' mit zugehörigen charakteristischen Funktionen ν und ν' heißen *strategisch äquivalent* falls gilt:

$$\exists k > 0, c_1, \ldots, c_n : \quad \nu'(S) = k\nu(S) + \sum_{i \in S} c_i \quad \forall S \subseteq N$$

Ein Wechsel von ν auf ν' bedeutet in diesem Fall also nur eine Änderung der Geldeinheit und dass für jeden Spieler i ein Zuschuss c_i addiert wird, was aber an der Ausgangslage nichts ändert. Es reicht somit nur eines von mehreren strategisch äquivalenten Spielen zu untersuchen.
Spiele werden in Folge oft genormt, sodass gilt:

- $\nu(i) = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, n$
- $\nu(N) = 1$

Definition 1.10: Nimmt der Wert der charakteristischen Funktion $\nu(S)$ nur die Werte 0 oder 1 für jede Koalition $S \subset N$ an, so spricht man von einem *einfachen Spiel*.

Definition 1.11: Ein gewichtetes Mehrheitsspiel $\Gamma = [M; w_1, \ldots, w_n]$, bei dem $w_1, \ldots, w_n$ nichtnegative reelle Zahlen sind und $M > \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i$ ist, ist ein n-Personen Spiel in Form einer charakteristischen Funktion, sodass für alle $S \subset N$ gilt:

- $\nu(S) = 1$ falls $\sum_{i \in S} w_i \geq M$
- $\nu(S) = 0$ falls $\sum_{i \in S} w_i < M$

w_i bezeichnet hier die Macht, die der Spieler i hat, M ist die für den Erfolg benötigte Mehrheit.

Beispiel 1.3: Nassau County im Staate New York besteht aus sechs Gemeinden mit sehr unterschiedlichen Einwohnerzahlen. Die Regierung besteht aus sechs Supervisors, jeweils einer aus jeder Gemeinde. Um eine ausgeglichene Bürgervertretung jeder Gemeinde zu erreichen, erhält jeder Supervisor eine unterschiedliche Anzahl an Stimmen. Die folgende Abbildung zeigt die Situation im Jahr 1964: Um eine Maßnahme durchzubringen mussten 58 von insgesamt 115 Stimmen erreicht werden.

District	Population	%	No of Votes	%
Hempstead 1 }	778,625	57 1	31	27 0
Hempstead 2 }			31	27 0
Oyster Bay	285,545	22 4	28	24 3
North Hempstead	213,335	16 7	21	18 3
Long Beach	25,654	2 0	2	1 7
Glen Cove	22,752	1 8	2	1 7
	1,275,801		115	

Nassau Countys Wahlvorgang bildet somit ein gewichtetes Mehrheitsspiel [58,31,31,28,21,2,2].

1.3 Spielearten

Spiele können nach verschiedenen Charakteristiken unterschieden werden:

1.3.1 Kooperativ oder Nicht-kooperativ

Ein Spiel ist kooperativ, wenn es die Möglichkeit der Zusammenarbeit zur Erhöhung des Nutzen bietet. Kapitel 2 beschäftigt sich ausführlicher mit der kooperativen Spieltheorie.

1.3.2 Einmalig oder Wiederholt

Ein Spiel, das nach einmaliger Durchführung nicht wiederholt wird, wird als *One-Shot-Game* bezeichnet. Wird ein One-Shot-Game mehrmals hintereinander durchgeführt, wobei sich im allgemeinen die Gesamtauszahlung für jeden Spieler durch die Auszahlungen jedes einzelnen One-Shot-Games ergibt, so spricht man von einem *wiederholten Spiel*.

1.3.3 Endlich oder Unendlich

Spiele sind üblicherweise gekennzeichnet durch eine endliche Anzahl an Zügen. In der Theorie sind jedoch auch Spiele mit unendlich vielen Zügen von Interesse.

1.3.4 Symmetrisch oder Asymmetrisch

Symmetrische Spiele sind jene, bei denen die Auszahlungsfunktion nicht von den Spielern, sondern ausschließlich von den Strategien abhängen. Die Spieler haben also die gleiche Ausgangsposition (z.B. Gefangenendilemma).

1.3.5 Simultan oder Sequentiell

Spiele, in denen die Spieler ihre Entscheidungen (Strategien) gleichzeitig treffen oder nichts über die vorangegangenen Entscheidungen wissen, nennt man *simultane Spiele*. Das heißt bei sequentieller Abfolge haben die Spieler Kenntnis über die Entscheidungen der anderen.
Simultane Spiele werden für gewöhnlich in der Normalform dargestellt, während sequentielle Spiele die Darstellung in extensiver Form benutzen.

1.3.6 Nullsummenspiele

Ein Spiel (N, S, U) heißt Nullsummenspiel, wenn $U^1 + U^2 + \ldots + U^n = 0$, das heißt für alle $s \in S$ gilt: $\sum_{j=1}^{n} U^j(s) = 0$. Gewinn kann folglich nur auf Kosten anderer erzielt werden. Was der eine Spieler bei dem Spiel als Gewinn erhält ist der anderen Spieler Verlust.

2 Kooperative Spieltheorie

Die Kooperative Spieltheorie beschäftigt sich mit Situationen, wo Kooperation und Konflikt zweier „Spieler“ (z.B. Versicherungsunternehmen, politische Parteien, etc.) aufeinandertreffen. Jeder Spieler ist in diesen Situationen daran interessiert Koalitionen zu bilden um einen möglichst großen Nutzen davon zu tragen, bzw. um Kosten zu minimieren. Wenn es jedoch darum geht den Gewinn aufzuteilen, so gehen die Meinungen auseinander, da jeder den Wunsch nach einem größtmöglichen Anteil hat. Um diesen aber so gerecht/angemessen wie möglich zu gestalten bedient man sich des Modells eines n-Personen kooperativen Spiels in Form einer charakteristischen Funktion. Nicht-kooperative Spiele werden hingegen in Normalform oder extensiver Form dargestellt.
Ein Spiel dieser Form besteht unter folgenden 3 Bedingungen:

- Alle Beteiligten sind berechtigt frei zu kooperieren, verhandeln, Verträge abzuschließen, Gruppen (oder Untergruppen) zu formen und sich von Gruppen zu trennen.
- Alle Beteiligten sind vollständig informiert über die „Spielregeln“, die möglichen Auszahlungen unter den einzelnen Situationen, alle möglichen Strategien, etc.
- Alle Beteiligten teilen ein gewisses Interesse oder Nutzen (z.B. Geld oder politische(n) Einfluss/Macht), welches vollständig transferierbar ist zwischen den Koalitionspartnern und für alle den gleichen Wert hat.

2.1 n-Personen Spiele mit übertragbaren Nutzwerten

2.1.1 Die Kostenfunktion

Definition 2.1: Eine *Kostenfunktion* $c(S)$ ist eine reellwertige Funktion, die jeder Menge $S \subset N$ einen reellen Wert $c(S)$ zuordnet. S nennt man eine *Koalition* von Spielern i, wobei N für die *große Koalition* steht. Für die Kostenfunktion gilt:

$$c(S \cup T) \leq c(S) + c(T) \quad \forall S, T \subset N : S \cap T = \emptyset \quad (\textbf{Subadditivität})$$

Sie unterscheidet sich zur charakteristischen Funktion also in der Subadditivität anstatt der Superadditivität. Man betrachtet hier die Höhe der Kosten, die man zu minimieren versucht. Ihr Zusammenhang mit der charakteristischen Funktion:

$$\nu(S) = \sum_{i \in S} c_i - c(S)$$

Beispiel 2.1: Betrachte eine Gruppe von $n_1 = 100$ Personen. Jede dieser Personen ist einem möglichen Verlust von 1 ausgesetzt mit einer Wahrscheinlichkeit $p_1 = 0{,}1$. Nehmen wir weiters an diese Gruppe beschließt einen Versicherungsverein zur Risikoverminderung zu gründen. Die Prämien, die von den einzelnen Personen verlangt werden, sollen so gestaltet werden, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ruins des Versicherungsvereins nicht 0,001 übersteigt. Unter der Annahme, dass die Risiken unabhängig von einander sind und unter der Verwendung der Normalapproximation der Binomialverteilung, hat der Verein insgesamt verfügbare Mittel

$$c(1) = \pi_1 + 3\sigma_1 = n_1 p_1 + 3\sqrt{n_1 p_1 (1 - p_1)} = 10 + 9 = 19$$

zu besitzen, wobei π_1 der Erwartungswert und σ_1 die Varianz der Schadenssumme sind.
Jedes Mitglied hat also eine Nettoprämie von 0,10 und einen Risikoprämie von 0,09 zu entrichten.
Nun gründet eine zweite Gruppe von wiederum $n_2 = 100$ Personen einen Versicherungsverein. Jede dieser Personen hat einen möglichen Verlust von 1, die Eintrittswahrscheinlichkeit beträgt jedoch $p_2 = 0{,}2$. Für diesen Verein entstehen nun Prämienansprüche von insgesamt

$$c(2) = \pi_2 + 3\sigma_2 = n_2 p_2 + 3\sqrt{n_2 p_2 (1 - p_2)} = 20 + 12 = 32$$

Die beiden Versicherungsvereine haben nun die Möglichkeit eine gemeinsame Versicherung zu formen, womit sich folgende Prämien ergeben würden:

$$c(12) = n_1 p_1 + n_2 p_2 + 3\sqrt{n_1 p_1 (1 - p_1) + n_2 p_2 (1 - p_2)} = 10 + 20 + 15 = 45$$

Da $c(12) = 45 < c(1) + c(2) = 51$, würde eine Kooperation in diesem Fall also eine Kostenreduktion von insgesamt 6 bedeuten. Nun stellt sich jedoch die Frage, wie dieser Gewinn am gerechtesten aufzuteilen ist.
Der ursprüngliche Ansatz einer proportionalen Aufteilung der Kosten von 15 und 30 würde bedeuten, dass Versicherungsverein 1 fast den Gewinn für sich beansprucht, was jedoch keiner fairen Lösung entspricht.
Bevor wir uns in dieses Beispiel weiter vertiefen, müssen wir noch einige wichtige Begriffe der kooperativen Spieltheorie kennenlernen:

Definition 2.2: Ein *payoff* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ist individuell rational, falls $\alpha_i \geq \nu(i)$ für $i = 1, \ldots, n$.

Definition 2.3: Eine *Imputation* für ein Spiel $\Gamma = [N, \nu]$ ist ein individuell rationaler payoff $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ der den maximalen Betrag zuteilt, also falls gilt:

- $\alpha_i \geq \nu(i)$ für $i = 1, \ldots, n$
- $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \nu(N)$

(**Effizienz** oder **Pareto-Optimalität**)

Ad Beispiel 2.1: Betrachten wir nun eine weitere Gruppe mit Personenanzahl $n_3 = 120$ und $p_3 = 0{,}3$. Unter den selben Voraussetzungen wie die ersten zwei Vereine erhalten wir für diesen eine benötigte Summe von

$$c(3) = n_3 p_3 + 3\sqrt{n_3 p_3 (3 - p_3)} = 36 + 15 = 51$$

sowie die Prämie bei Zusammenschluss aller Vereine

$$c(123) = n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + 3(\sum_{i=1}^{3} n_i p_i (1 - p_i))^{\frac{1}{2}} = 10 + 20 + 36 + 21 = 87$$

Eine Imputation ist in diesem Fall ein payoff $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, der folgenden Bedingungen genügt:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 87 \\ \alpha_1 &\leq 19 \\ \alpha_2 &\leq 32 \\ \alpha_3 &\leq 51 \end{aligned}$$

Eine mögliche Aufteilung der Kosten, die diese Bedingungen erfüllt könnte zum Beispiel (17, 31, 39) sein. Dieser würden aber die Vereine 1 und 2 nicht zustimmen, da sie bei Gründung einer Koalition (12) weniger zahlen würden. Verein 3 wird also - bevor er gezwungen ist 51 alleine aufzubringen - ein höheres α_3 akzeptieren. Diese Überlegungen führen zu weiteren Eigenschaften.

2.1.2 Kern und stabile Menge

Definition 2.4: Ein payoff $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ist *kollektiv rational*, falls $\sum_{i \in S} \alpha_i \geq \nu(S)$ für alle $S \subset N$.

Definition 2.5: Die Menge aller kollektiv rationalen payoffs nennt man den **Kern**.

Der Kern kann leer sein. Ist er es aber nicht, so besteht er aus einer Menge von Punkten. Der Kern kann auch über den Begriff der Dominanz definiert werden.

Definition 2.6: Eine Imputation $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ dominiert eine Imputation $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ in Bezug auf eine Koalition S, falls gilt:

- $S \neq \emptyset$
- $\beta_i > \alpha_i$
- $\nu(S) \geq \sum_{i \in S} \beta_i$

Definition 2.7: Eine Imputation β dominiert eine Imputation α, wenn eine Koalition S existiert, sodass α von β dominiert wird in Bezug auf S.

Definition 2.8: Der Kern ist die Menge aller undominierten Imputationen. (Diese Definition ist äquivalent zu Definition 2.5)

Ad Beispiel 2.1: Der Kern ergibt sich aus allen payoffs die den maximalen Betrag $c(123) = 87$ aufteilen, jedoch gleichzeitig den Bedingungen der individuellen, sowie der kollektiven, Rationalität erfüllen.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 87 \\
\alpha_1 &\leq 19 \\
\alpha_2 &\leq 32 \\
\alpha_3 &\leq 51 \\
\alpha_1 + \alpha_2 &\leq 45 \\
\alpha_1 + \alpha_3 &\leq 63,5 \\
\alpha_2 + \alpha_3 &\leq 75,3
\end{aligned}$$

Daraus können wir die oberen und unteren Grenzen des Kerns festlegen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 87 \\ 11,7 \leq \alpha_1 &\leq 19 \\ 23,5 \leq \alpha_2 &\leq 32 \\ 42 \leq \alpha_3 &\leq 51 \end{aligned}$$

Eine Verletzung dieser Bedingungen führt zum Verlassen von einer oder 2 Gruppen.

Definition 2.9: Eine *stabile Menge* (*Von Neumann-Morgenstern-Lösung*) eines Spieles $\Gamma = [N, \nu]$ ist eine Menge L von Imputationen, welche die folgenden Konditionen erfüllt:

- Zu jeder Imputation $\alpha \notin L$ existiert eine Imputation $\beta \in L$ die α dominiert (**externe Stabilität**)
- Keine Imputation von L dominiert eine andere Imputation von L (**interne Stabilität**)

Stabile Mengen sind zumeist schwer zu berechnen. Das Hauptproblem vom Kern und von den stabilen Menge liegt jedoch darin, dass sie in den meisten Fällen unendlich viele Aufteilungen enthält. So bestehen zum Beispiel der Kern und die stabile Menge aller 2-Personen Spiele aus allen Imputationen.

2.1.3 Der Shapley-Wert

Man versucht immer eine eindeutige, faire Aufteilung zu finden. Dies erreicht der Shapley-Wert:

Definition 2.10: Der *Shapley-Wert* ist jener Wert, der folgende Axiome erfüllt:

- **(Symmetrie)**: Für alle Permutationen Π von Spielern die $\nu[\Pi(S)] = \nu(S)$ für alle S erfüllen, soll gelten:

  $$\alpha_{\Pi(i)} = \alpha(i)$$

  Jedes symmetrische Problem hat eine symmetrische Lösung. Zwei Spieler die nicht durch die charakteristische Funktion unterschieden werden können und den selben Beitrag zur Koalition leisten, sollten den selben payoff erhalten. Dieses Axiom wird auch die *Anonymität* genannt. Die gewählte Aufteilung hängt also nur von der charakteristischen Funktion ab.

- **(dummy-player)**: Wenn für einen Spieler i für jede ihm mögliche Koalition $\nu(S) = \nu(S \backslash i) + \nu(i)$ gilt, dann folgt:

  $$\alpha_i = \nu(i)$$

  Ein *dummy-player* ist ein Spieler, dessen Beitritt zu einer Koalition keinen Vorteil bringt. Der Wert der Koalition erhöht sich durch ihn um $\nu(i)$, wodurch er keinen Anspruch auf einen Anteil des Gewinns hat.

- **(Additivität)**: Seien $\Gamma = [N, \nu]$ und $\Gamma' = [N, \nu']$ zwei Spiele und $\alpha(\nu)$ und $\alpha(\nu')$ die jeweiligen payoffs für diese Spiele, dann gilt für alle Spieler:

  $$\alpha(\nu + \nu') = \alpha(\nu) + \alpha(\nu')$$

  Payoffs, die aus zwei verschiedenen Spielen hervorgehen, sollen addiert werden. Dieses Axiom wird jedoch kritisiert, da es eine wechselseitige Beeinflussung zweier Spiele ausschließt.

Definition 2.11: Shapley zeigte, dass sich der Wert, der diese Axiome erfüllt, wie folgt berechnen lässt:

$$\alpha_i = \frac{1}{n!} \sum_S (s-1)!(n-s)![\nu(S) - \nu(S \backslash i)]$$

wobei s die Anzahl der Mitglieder der Koalition S ist.
Der Shapley-Wert kann interpretiert werden als der „Beitrittswert“, wenn alle möglichen Formationen aus der großen Koalition gleichwahrscheinlich sind. Bei der Erstellung des Wertes ist anzunehmen, dass alle Teilnehmer der Koalition nach der Reihe beitreten und dabei den ganzen Gewinn erhalten, der durch dessen Beitritt lukriert wurde. Dabei werden alle verschiedenen Formationen $N!$ beachtet und mit $\frac{1}{n!}$ gewichtet. Zudem gibt es $(s-1)!(n-s)!$ Möglichkeiten, dass der Spieler als letzte Person der Koalition S beitritt. Die $(s-1)$ restlichen Spieler in S und die $(n-s)$ Spieler aus $N \backslash S$ können beliebig permutiert werden ohne die Position von Spieler i zu beeinflussen.

Ad Beispiel 1.3: Betrachtet man die möglichen Mehrheitsbildungen, so kann man sehen, dass die Macht nicht durch die gewichteten Stimmen bestimmbar ist. Die drei kleineren Gemeinden hätten in diesem Fall gar keine

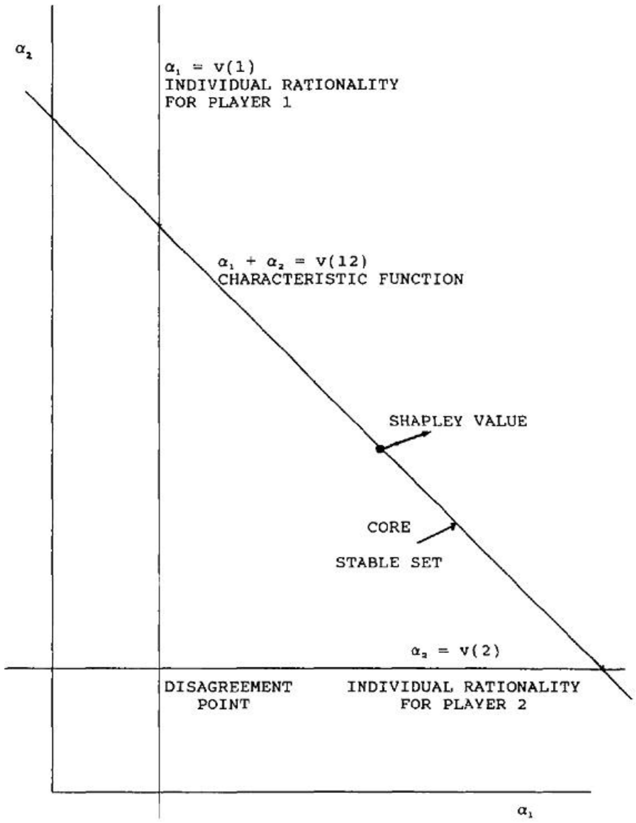

Abbildung 2: 2-Personen Spiel mit übertragbaren Nutzwerten

politische Macht, denn um eine Mehrheit zu erreichen benötigt man mindestens zwei der drei großen Gemeinden, da die drei kleineren zusammen nur auf 25 Stimmen kommen. Wenn jedoch schon zwei große Gemeinden ihre Stimme für den Beschluss abgeben, spielen die Entscheidungen der restlichen keine Rolle mehr. Man könnte also die Stimmengewichtung genauso mit [31,31,28,0,0,0] oder [1,1,1,0,0,0] festlegen.
Der Shapley-Wert der Gemeinden wäre [$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{3}$,0,0,0]. Diese Analyse bewegte die Behörden dazu die benötigte Mehrheit von 58 auf 63 Stimmen anzuheben. So existieren keine dummy-player mehr und die neue Stimmengewichtung ist [0 283, 0.283, 0.217, 0.117, 0.050, 0.050], was schon eher einer ausgeglichenen Bürgervertretung entspricht.

Ad Beispiel 2.1: In der Version des Zusammenschlusses von Verein 1 und 2 ist der Shapley-Wert [16, 29], bei der von allen 3 Vereinen [14.5, 16.9, 45.6].

Eine proportionale Aufteilung würde zu [13.2, 26.4, 47.4] führen, was nicht die Ersparnisse einbezieht, die von den einzelnen Vereinen für die große Koalition erbracht werden.

Der Shapley-Wert kann im allgemeinen auch außerhalb des Kerns liegen. Anders ist dies hingegen bei konvexen Spielen, bei denen der Shapley-Wert immer innerhalb des Kerns liegt.

Definition 2.12: Ein Spiel ist *konvex*, wenn für alle $S \subset T \subset N$ und für alle $i \notin T$ gilt:

$$\nu(T \cup i) - \nu(T) \geq \nu(S \cup i) - \nu(S)$$

Konvexe Spiele bedeuten immer einen umso größeren Kostenvorteil je größer die Koalition ist. Man spricht auch von einem „Schneeballeffekt“, da eine Koalition von größerem Interesse wird, wenn die Anzahl ihrer Mitglieder steigt. Derjenige, der als letztes beitritt, zieht dabei den größten Nutzen von der Kooperation.
Der Kern von kompakten Spielen ist stets nicht-leer und enthält den Shapley-Wert als Mittelpunkt.

2.1.4 Verallgemeinerung von Beispiel 2.1

Aufbauend auf dem **Beispiel 2.1** gehen wir nun von n Gruppen aus. Gruppe $i (i = 1, \ldots, n)$ besteht aus n_i Mitgliedern mit einer Wahrscheinlichkeit des Verlustes p_i. N sei wiederum die große Koalition und S eine beliebige Teilmenge, bzw. Koalition, aus N. Wir nehmen an, dass die Gruppen sich zu Versicherungen zusammenschließen können unter der Voraussetzung, dass die Wahrscheinlichkeit des Ruins unter 0,001 bleibt. Demnach hat eine Teilgruppe S, die ein Versicherungsunternehmen bildet, Prämien zu zahlen, die sich berechnen aus:

$$c(S) = \sum_{i \in S} n_i p_i + 3\Big(\sum_{i \in S} n_i p_i (1 - p_i)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Nun stellt sich die Frage, welche von den $2^n - 1$ möglichen Koalitionen werden ein Versicherungsunternehmen gründen, und wieviel zahlt jede Gruppe die dieser Koalition angehört?

Sei S eine Koalition von s Gruppen, dann besteht $\overline{S}$ aus den restlichen $n - s$ Gruppen. Für diese Gruppen gilt dann:

$$c(S) + c(\overline{S}) > c(N)$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Gesamtbetrag der Prämien am kleinsten ist, wenn alle Gruppen ein gemeinsames Versicherungsunternehmen formen. Agieren die Gruppen rational werden sie also dieses Unternehmen gründen. Für eine passende Aufteilung der Prämien muss nun wie schon bei dem Modell mit 3 Versicherungsvereinen für eine Imputation $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ gelten:

- $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = c(N)$
- $\alpha_i \leq c(i) \quad \forall i$

Jede Imputation α dieser Gestalt ist eine *Lösung* nach Von Neumann.
Man kann sich nun den Gewinn t_i, den eine Gruppe i macht, berechnen durch:

$$t_i = c(i) - \alpha_i$$

sowie den Gesamtgewinn:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} c(i) - c(N)$$

Wir grenzen nun die Lösung ein, indem wir eine weitere Bedingung an die Imputation stellen:

$$\sum_{i \in S} \alpha_i \leq c(S)$$

Eine Teilgruppe S wird demnach nicht in der großen Koalition bleiben, wenn der Gesamtbetrag der Prämien kleiner ist bei Gründung eines eigenen Versicherungsunternehmens.
Alle Imputationen, die eine Lösung nach Von Neumann sind und diese Bedingung erfüllen, bilden den *Kern*.

Sei $M - i$ die Menge aller Gruppen außer der Gruppe i. Unter den vorigen Annahmen ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = c(N)$$
$$\sum_{j \neq k} \alpha_j \leq c(N - k)$$

Durch Subtraktion ergibt sich

$$\alpha_k \geq c(N) - c(N - k)$$

wodurch wir für die α_i ein Intervall akzeptabler Imputationen gefunden haben:

$$c(N) - c(N - i) \leq \alpha_i \leq c(i)$$

Die i-te Gruppe zahlt also mindestens den Betrag der entsteht, falls sie den ganzen Gewinn aus der Koalitionsbildung für sich beansprucht, und höchstens jenen Betrag der anfällt, falls sie keinen Anteil des Gewinns erhält.

Sei $\pi_i = n_i p_i$ der Mittelwert der Verluste und $\sigma_i = n_i p_i(1 - p_i)$ deren Varianz mit $\pi = \sum_{i=1}^{n} \pi_i$ und $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$. Mit dieser Notation können wir die Prämien anschreiben als:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pi + 3\sqrt{\sigma}$$

Sind die σ_i klein in Relation zu σ, dann lässt sich das Intervall der Imputationen approximieren wie folgt:

$$\pi_i + 3\frac{\sigma_i}{2\sqrt{\sigma}} \leq \alpha_i \leq \pi_i + 3\sqrt{\sigma_i}$$

Eine Imputation aus dem Kern können also nicht kleiner als die Nettoprämie π_i sein. Für $m = \sum_{i=1}^{n} n_i \to \infty$ ergibt sich für jede Person eine Prämie die approximativ gleich der Nettoprämie ist.

Der Shapley-Wert berechnet sich auch hier nach Defnition 2.11, jedoch unter der Annahme, dass jede Gruppe einem Gewinn den gleichen Nutzen zuordnet. Nimmt man jedoch an, dass eine Gruppe i dem Gewinn t_i einen Nutzen

$$u_i(t_i) = \frac{t_i}{n_i}$$

zuordnet, wo also der Gewinn eines einzelnen Gruppenmitgliedes dargestellt wird, dann ist der Shapley-Wert nicht mehr gültig. In diesem Fall muss man auf eine allgemeinere Methode von **Harsanyi** zurückgreifen, oder den Shapley-Wert für ein Spiel mit m Personen anstatt n Gruppen berechnen.

2.2 2-Personen Spiele ohne übertragbaren Nutzwerten

Definition 2.13: Ein Spiel (M, d) mit Uneinigkeitspunkt $d = (d_1, d_2)$ (der ursprüngliche Nutzwert) und einer konvexen, kompakten Menge M in einem 2-dimensionalen Raum E^2 der Nutzwerte, die erreicht werden können, nennt man ein *2-Personen Spiel ohne übertragbaren Nutzen* (oder auch *2-Personen Verhandlungsspiel*).

B sei die Menge aller Paare (M, d). Man sucht wieder nur Lösungen, die individuell rational sind. M kann demnach beschränkt werden auf die Menge der Punkte (p_1, p_2), sodass $p_1 \geq d_1$ und $p_2 \geq d_2$.

Definition 2.14: Eine Regel, die jedem Verhandlungsspiel einen payoff aus M zuweist, nennt man eine *Lösung* (*Wert*). Also eine Funktion f mit:

$$f : B \to E^2 : (M, d) \to f(M, d) = p \quad \forall (M, d) \in B$$

wobei $f_1(M, d) = p_1$ und $f_2(M, d) = p_2$.

Beispiel 2.2: Ein Versicherungsunternehmen C_1 besitzt ein Portfolio von Risiken mit einer mittleren Schadenssumme von 5 und einer Varianz 4. Unternehmen C_2 besitzt ebenfalls ein derartiges Portfolio mit mittlerer Schadenssumme 10 und Varianz 8.
Die Versicherungsunternehmen beschließen einen linearen Risikoaustausch vorzunehmen, bei dem x_1 und x_2 die Schadenssummen vor, und y_1 und y_2 die Schadenssummen nach dem Risikoaustausch bezeichnen. Die meist gebräuchliche Form eines linearen Risikoaustausches ist

$$\begin{aligned} y_1 &= (1 - \alpha)x_1 + \beta x_1 + K \\ y_2 &= \alpha x_1 + (1 - \beta)x_2 + K \end{aligned}$$

mit $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ und K ist eine fixe Summe.
Sei $K = 5\alpha - 10\beta$, dann ist $\mathbb{E}(y_1) = \mathbb{E}(x_1) = 5$ und $\mathbb{E}(y_2) = \mathbb{E}(x_2) = 10$. Also untersucht man nur die Varianzen:

$$\begin{aligned} Var(y_1) &= 4(1 - \alpha)^2 + 8\beta^2 \\ Var(y_2) &= 4\alpha^2 + 8(1 - \beta)^2 \end{aligned}$$

Wählt man zum Beispiel $\alpha = 0,2$ und $\beta = 0,3$, dann erhält man als Varianzen $Var(y_1) = 3,28 < 4$ und $Var(y_2) = 4,08 < 8$. Somit hat sich die Situation für beide Unternehmen verbessert, aber welche Werten α und β

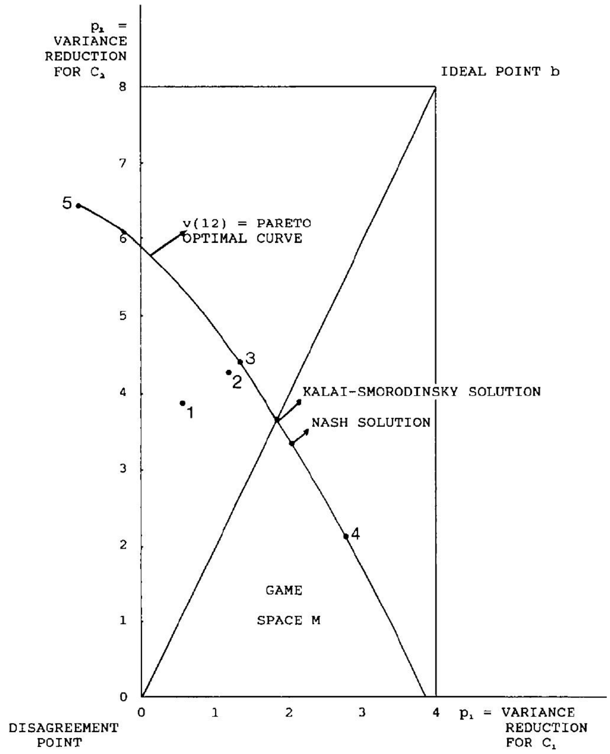

Abbildung 3: 2-Personen Spiel ohne übertragbaren Nutzwerten

sind hier optimal?

Betrachten wir nun einige mögliche Werte, dessen Auswirkungen in Abbildung 3 zu sehen sind, wobei p_1 und p_2 die Varianzreduktionen sind:

- **Punkt 1** ($\alpha = 0,2$, $\beta = 0,3$): Dieser Punkt ist jener, der mit $p_1 = 0,72$ und $p_2 = 3,92$ im vorigen Beispiel gebracht wurde.

- **Punkt 2** ($\alpha = \beta = 0,4$): Dieser Punkt dominiert Punkt 1, da er zu höheren Varianzreduktionen führt.

- **Punkt 3** ($\alpha = 0,53$, $\beta = 0,47$): Punkt 3 liegt auf der Pareto-optimalen Kurve und dominiert somit Punkt 1 und Punkt 2.

- **Punkt 4** ($\alpha = 0,7$, $\beta = 0,3$): Punkt 4 liegt wie Punkt 3 auf der Pareto-optimalen Kurve. Er wird vom Versicherungsunternehmen C_1 gegenüber Punkt 3 bevorzugt, da er für ihn eine größere Varianzreduktion bedeutet. Das Versicherungsunternehmen C_2 wird sich wiederum für Punkt 3 aussprechen.

- **Punkt 5** ($\alpha = 0,35,\ \beta = 0,65$): Dieser Punkt liegt zwar auch auf der Kurve, er befindet sich jedoch außerhalb des für C_1 akzeptablen Bereiches.

Alle Punkte mit $\alpha+\beta = 1$ liegen auf der Pareto-optimalen Kurve. Sie können nicht von einander dominiert werden und dominieren jeden Punkt unterhalb der Kurve. Unterhalb dieser Kurve liegen alle erreichbaren Punkte, die gemeinsam den Spielraum M bilden. Die Menge der Pareto-optimalen Punkte ist hier im Gegensatz zur charakteristischen Funktion aus Beispiel 2.1 jedoch eine Kurve aufgrund der nicht übertragbaren Nutzwerte. Die Spieler können über Varianzen verhandeln, aus einem Anstieg von $Var(y_1)$ um 1 resultiert aber eine Senkung von $Var(y_1)$ um einen Wert ungleich 1.

2.2.1 Nash-Lösung

Das erste Lösungskonzept (*Nash-Lösung*) eines 2-Personen Spieles ohne übertragbaren Nutzwerten wurde 1950 von John F. Nash entwickelt und erfüllt folgende 4 Axiome:

1. Axiom (**Unabhängigkeit von linearen Transformationen**): Die Lösung kann nicht durch auf die Nutzwerte der Spieler angewandte lineare Transformationen beeinträchtigt werden. Für alle (M, d) und $\forall a_i \in \mathbb{R}^+$ und b_i, sei (M', d'), gegeben durch $d'_i = a_i d_i + b_i \quad (i = 1, 2)$ und $M' = \{q \in E^2 | \exists p \in M : q_i = a_i p_i + b_i\}$, folgt:

   $$f_i(M', d') = a_i f_i(M, d) + b_i, \quad i = 1, 2$$

   Dieses Axiom gibt nur die Information der Nutzwertfunktion wider. Da die Nutzwertfunktion bis auf lineare Transformationen definiert ist, sollte das auch für die Lösung gelten.

2. Axiom (**Symmetrie**): Alle Spiele haben eine symmetrische Lösung. Unter der Voraussetzung $f_1(M, d) = f_2(M, d)$ nennt man eine Lösung symmetrisch, wenn $d_1 = d_2$ und $(p_1, p_2) \in M \Rightarrow (p_2, p_1) \in M$. Das Axiom verlangt zudem, dass $f_1(M, d) = f_2(M, d)$.

   Eine Permutation von zwei Spielern ändert demnach nichts an der Lösung, wenn sie nicht durch die Funktion f unterscheidet werden können. Die Spieler erhalten dann auch den selben Gewinn.

3. Axiom (**Pareto-Optimalität**): Die Lösung soll auf der Pareto-optimalen Kurve liegen. Die Lösung p kann für alle $(M,d) \in B$, mit $p, q \in M$: $q_i > p_i \quad (i = 1,2)$, nicht von der Gestalt $f(M,d) \neq p$ sein.

   Die Lösung befindet sich demnach auf dem oberen Rand des Spielraumes.

4. Axiom (**Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen**): Die Lösung ändert sich nicht, nachdem man einen beliebigen Punkt, der kein Uneinigkeitspunkt oder eine Lösung ist, entfernt. Für 2 Spiele (M,d) und (M',d) mit $M \subset M'$ und $f(M',d) \in M$ gilt:

   $$f(M,d) = f(M',d)$$

   Hier wird der Vehandlungsprozess formalisiert. Es wird verlangt, dass die Lösung vom oberen Rand des Spielraumes nur in dessen Umgebung abhängt, und nicht von entfernten Punkten. Damit wird ausgedrückt, dass sich die Menge der Alternativen durch Verhandlungen fortgehend verkleinert, sodass die Lösung am Ende nur mit sehr nahen Punkten verglichen wird und nicht mit bereits längst ausgeschlossenen Vorschlägen.
   Die Axiome beschreiben den Vorgang des Verhandelns, bei dem die Spieler einer Menge von akzeptablen Punkten immer näher kommen. Auf diesem Weg müssen beide Partner solange einander entgegenkommen, bis ein einziger Punkt übrig bleibt.

John Nash zeigte 1950, dass es genau einen Punkt gibt, der diese Bedingungen erfüllt. Die Nash-Lösung ist die Funktion f, die definiert ist durch $f(M,d) = p$, sodass $p \geq d$ und

$$(p_1 - d_1)(p_2 - d_2) \geq (q_1 - d_1)(q_2 - d_2) \quad \forall q \neq p \in M.$$

Ad Beispiel 2.2: Der Uneinigkeitspunkt ist $d = (0,0)$. Wenn sich die Unternehmen nicht auf einen Risikoaustausch einigen können kehren sie zu ihrem ursprünglichen Portfolio zurück, ohne eine Verbesserung zu erfahren. Die Varianzreduktionen der Spieler sind

$$p_1 = 4 - 4(1-\alpha)^2 - 8\beta^2$$
$$p_2 = 8 - 4\alpha^2 - 8(1-\beta)^2$$

Maximiert man das Produkt $p_1 p_2$ unter der Bedingung dass $\alpha+\beta=1$, erhält man die Nash-Lösung:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,613 \\ \beta &= 0,378 \\ p_1 &= 2,203 \\ p_2 &= 3,491 \end{aligned}$$

Nashs viertes Axiom, welches die Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen festlegt, wurde von Kalai und Smorodinsky im Jahr 1975 kritisiert, da die Nash-Lösung keine Monotonie voraussetzt. Um dies zu veranschaulichen betrachte man folgendes Beispiel:

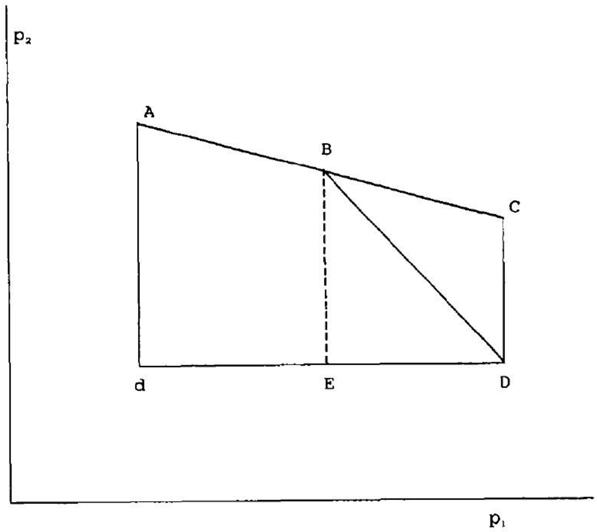

Abbildung 4: Fehlende Monotonie der Nash-Lösung

Beispiel 2.3: Gegeben seien zwei Spielräume. Der erste Raum besitzt die Eckpunkte d, A, B, D, wobei in diesem Modell Punkt B die Nash-Lösung darstellt. Der zweite Spielraum ist jener Raum mit den Eckpunkten d, A, C und D. Aus Sicht des zweiten Spielers wirkt nun das zweite Spiel attraktiver, da sein payoff größer ist, wenn der payoff von Spieler 1 zwischen E und D liegt. Die Nash-Lösung dieses Spiels, die in Punkt C dargestellt wird, ist jedoch niedriger als jene von Spiel 1.

2.2.2 Kalai-Smorodinsky-Lösung

Kalai und Smorodinsky haben Nash's 4. Axiom durch folgendes ersetzt:

5. Axiom (**Monotonie**): Sei $b(M) = (b_1, b_2)$ der *ideale Punkt*, der von den maximalen payoffs gebildet wird, das heißt:

$$b_i = max\{p_i | (p_1, p_2) \in M\}, \quad (i = 1, 2)$$

Seien nun (M, d) und (M', d) zwei Spiele mit $M' \subset M$ und $b(M) = b(M')$, dann gilt:

$$f(M, d) \geq f(M', d)$$

Kalai und Smorodinsky haben gezeigt, dass genau ein Punkt die Axiome 1, 2, 3 und 5 erfüllt. Die *Kalai-Smorodinsky-Lösung* ist der Schnittpunkt der Pareto-optimalen Kurve mit der Verbindungsgerade zwischen dem Uneinigkeitspunkt d und dem idealen Punkt b.

Ad Beispiel 2.2: Die Gleichung der Pareto-optimalen Kurve lautet:

$$\sqrt{8 - p_1} + \sqrt{4 - p_2} = 12$$

Der ideale Punkt ist $(4, 8)$, seine Verbindungslinie mit dem Uneinigkeitspunkt $(0, 0)$ die somit die Gleichung:

$$p_2 = 2p_1$$

Die Lösung nach Kalai-Smorodinsky ist demnach

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,5858 \\ \beta &= 0,4142 \\ p_1 &= 1,9413 \\ p_2 &= 3,8821 \end{aligned}$$

2.3 Weitere Lösungskonzepte

Die wichtigsten Lösungskonzepte in der kooperativen Spieltheorie sind die stabilen Mengen und der Kern, die durch die Einführung intuitiver Bedingungen die Anzahl der möglichen Aufteilungen reduzieren. Trotzdem bleiben auch sie nicht von Kritik verschont.
Stabile Mengen sind schwer zu berechnen, falls sie denn überhaupt existieren. Darüber hinaus ist die Dominanzrelation weder antisymmetrisch noch

transitiv. Es kann also vorkommen, dass eine Imptutation β eine Imputation α im Bezug auf eine Koalition dominiert, während α jedoch β im Bezug auf eine andere Koalition dominiert. Eine Imputation aus einer stabilen Menge kann von einer Imputation dominiert werden die nicht in der stabilen Menge liegt.
Der Kern wird von vielen als zu statisch angesehen, da er die Dynamik des Verhandlungsprozesses nicht erfasst.
Dies führte **Aumann** und **Maschler** 1964 dazu das *bargaining set* zu definieren, das diesen Prozess von mehreren Kriterien abhängig macht. Spieler wollen demnach zwar ihren payoff maximieren, sind aber gleichzeitig an einer sicheren und stabilen Koalition interessiert und somit kompromissbereiter. Dieses Verhalten ist modelliert als ein dynamischer Prozess von „*threats*“ (Drohungen) und „*counter-threats*“ (Gegendrohungen). Ein payoff ist demnach stabil, wenn alle Einwände mit Gegeneinwänden beantwortet werden können. Das bargaining set ist niemals leer und enthält immer den Kern.

Beispiel 2.4: Es sei ein 3-Personen Spiel gegeben mit den Werten

$$\begin{aligned} \nu(1) = \nu(2) = \nu(3) = 0 \\ \nu(12) = \nu(13) = 100 \\ \nu(23) = 50 \end{aligned}$$

Dieses Spiel besitzt einen leeren Kern: Die Spieler werden sich nun nicht auf eine Aufteilung [75, 25, 0] einigen, da diese dominiert wird durch [76, 0, 24]. Laut Theorie des bargaining set ist dieser payoff aber stabil, denn wenn Spieler 1 mit dem zweiten payoff Spieler 2 droht, so kann dies mit einer Gegendrohung [0, 25, 25] beantwortet werden.
Andererseits ist zum Beispiel [80, 20, 0] nicht stabil, da Spieler 2 vorschlagen kann, dass er zusammen mit Spieler 3 durch [0, 21, 29] mehr bekommen könnte. Spieler 1 steht nun aber keine Gegendrohung zur Verfügung, da er, wenn er Spieler 3 mindestens 29 anbietet, seine 80 nicht behalten könnte.
Das bargaining set enthält neben den Punkten aus dem Kern zusätzlich aus allen payoffs, für die Drohungen existieren, für die wiederum Gegendrohungen möglich sind.
Hier besteht das bargaining set aus den Punkten:

$$\begin{aligned} [0, 0, 0] \\ [75, 0, 25] \\ [75, 25, 0] \\ [0, 25, 25] \end{aligned}$$

Im Jahr 1965 definierten **Davis** und **Maschler** den *kernel*, eine Teilmenge des bargaining set. 1969 führte dann **Schmeidler** den *nucleolus* ein, einen eindeutigen payoff, der im kernel enthalten ist. Der nucleolus ist definiert als der payoff, der sukzessive den größten *koalitionären Exzess* minimiert. Der koalitionäre Exzess ergibt sich aus der Differenz zwischen dem payoff, den eine Koalition erreichen kann, und dem vorgeschlagenen payoff:

$$e(\alpha, S) = \nu(S) - \sum_{i \in S} \alpha_i$$

Er misst also den Wert, den die Koalition bei Annahme des payoff α unter ihrem Potential liegt. Ist der Exzess negativ, so ist der payoff akzeptabel, anderenfalls liegt er außerhalb des Kerns. Die Koalition strebt dennoch einen kleinst möglichen Exzess $e(\alpha, S)$ an.
Der nucleolus minimiert (lexikographisch) den maximalen Exzess. Er liegt immer in der Mitte des Kerns.
Es existieren verschiedene Varianten des nucleolus, wie den proportionalen nucleolus, der folgende Gestalt besitzt:

$$e(\alpha, S) = \frac{\nu(S) - \sum_{i \in S} \alpha_i}{\nu(S)}$$

Eine andere Variante wäre der trennende nucleolus.
Da der nucleolus (oder auch *lexikographisches Zentrum*) ein eindeutiger Wert ist, bildet er eine Alternative zum Shapley-Wert.

Literatur

[JL] Jean Lemaire: *Cooperative Game Theory And It's Insurance Applications*, Astin Bulletin Vol. 21, No. 1, 17-40; 1991

[KB] Karl Borch: *Application Of Game Theory To Some Problems In Automobile Insurance*; Astin Bulletin Vol. 2, 208-221; 1962

[SCH] Walter Schlee: *Einführung in die Spieltheorie*; Vieweg Verlagsgesellschaft; 2004

[WL] http://wikiludia.mathematik.uni-muenchen.de

[WP] http://en.wikipedia.org/wiki/Game_theory

[PW] http://www.econ.canterbury.ac.nz/personal_pages/
/paul_walker/gt/hist.htm