Fondsgebundene Lebensversicherung

Florian Mair
0655529

21.April 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die fondsgebundene Lebensversicherung ist eine kapitalbildende Lebensversicherung, bei der der gesamte Leistungsanspruch, oder wenigstens ein wesentlicher Teil, direkt an die Wertentwicklung von bestimmten vertraglich vereinbarten Finanzinstrumenten (meist Wertpapieranteile) gebunden ist. Bei der ursprünglichen Form der fondsgebundenen Lebensversicherung übernimmt der Versicherer keine Verpflichtung die Leistung in einer bestimmten Höhe zu erbringen, sprich wenn der Kurs des Wertpapiers fällt, muss der Versicherer dem Versicherungsnehmer nicht einen gewissen Fixbetrag bezahlen.
Heutzutage gibt es allerdings Formen der Versicherung, die dem Versicherungsnehmer eine bestimmte Garantie (z.B. Rückbezahlung der bereits geleisteten Prämien) zusagen. Für diese Art der Versicherung ist es charakteristisch, dass die Leistungen im Erlebens- oder auch im Todesfall nicht deterministisch, sondern zufällig sind, was ein großer Unterschied zur üblichen Lebensversicherung ist. Ein weiterer Unterschied ist, dass sie hauptsächlich gegen eine Einmalprämie verkauft wird, was für das Versicherungsunternehmen leichter zu handhaben ist. (Es kann die komplette Prämie sofort in einen Fonds angelegt werden.) Weiters gilt bei der fondsgebundenen Lebensversicherung, dass die Risikosumme vom Wert des zugrundeliegenden Wertpapiers abhängt, was bei traditionellen Produkten nicht so ist.

2 Grundlagen der Lebensversicherungsmathematik

Die Grundlagen der Lebensversicherungsmathematik wurden bereits in einer eigenen Vorlesung behandelt, und ich möchte daher hier nur auf die Wichtigsten Begriffe kurz eingehen. Dazu gehören die verschiedenen Arten von Versicherungen, die Berechnung des Deckungskapitals, die Berechnung von Spar- und Risikoprämie und die Thielsche Differentialgleichung. Diese Themen werden dann in den nachfolgenden Kapiteln noch mit Mitteln der Finanzmathematik erweitert um schließlich ein Modell für die fondsgebundene Lebensversicherung zu erhalten.

Zuerst einige wichtige Defintionen:

Definition 2.1 *Die zukünftige Lebensdauer einer Person im Alter x wird durch die Zufallsvariable T_x bezeichnet. $G_x(t) = \mathbb{P}[T_x \leq t]$ ist die Verteilungsfunktion von T_x, $g_x(t)$ bezeichnet deren Dichtefunktion.*

Definition 2.2 *Die t-jährige Sterbewahrscheinlichkeit eines x-Jährigen wird mit ${}_tq_x$ bezeichnet. (${}_tq_x = G_x(t)$)*

Definition 2.3 *Die t-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines x-Jährigen wird mit ${}_tp_x$ bezeichnet. (${}_tp_x = 1 - G_x(t)$)*

Definition 2.4 *Die Sterblichkeitsintensität eines x-Jährigen im Alter x+t ist definiert durch $\mu_{x+t} = \frac{g_x(t)}{1-G_x(t)}$*

2.1 Arten von Versicherungen

Die beiden wichtigsten Arten der Lebensversicherungsmathematik: Er- und Ablebensversicherung werden hier kurz vorgestellt. Die in der Praxis am öftesten verwendete gemischte Versicherung ergibt sich als Summe von Er- und Ablebensversicherung. Wenn nicht anders erwähnt, wird als Versicherungssumme 1 angenommen. Jeder andere Wert kann durch Multiplikation leicht berechnet werden.

2.1.1 Erlebensversicherung

Bei einer n-jährigen reinen Erlebensversicherung (engl. pure endowment) wird die Versicherungssumme nach n Jahren ausbezahlt, wenn der Versicherte noch am Leben ist.

$$\text{Barwert:} \quad z = \begin{cases} v^n & \text{wenn } K_x \geq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

Definition 2.5 *Die Nettoeinmalprämie ist der Erwartungswert des Barwertes.*

$${}_nE_x = \mathbb{E}[z] = v^n \, {}_np_x \tag{2}$$

2.1.2 Ablebensversicherung

Bei einer n-jährigen Ablebensversicherung (engl. term insurance) wird die Versicherungssumme am Ende des Todesjahres ausbezahlt, wenn der Tod innerhalb von n Jahren eintritt.

$$\text{Barwert:} \quad z = \begin{cases} v^{K_x+1} & \text{wenn } K_x < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3}$$

Definition 2.6 *Die Nettoeinmalprämie ist der Erwartungswert des Barwertes.*

$$A^1_{x:n} = \mathbb{E}[z] = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \, {}_kp_x \, q_{x+k} \tag{4}$$

Definition 2.7 *Stetige Ablebensversicherung mit Versicherungssumme c(t)*

$$\textit{Barwert:} \quad z = c(T_x) \, v^{T_x} \tag{5}$$

$$\textit{Nettoeinmalprämie:} \quad \mathbb{E}[z] = \int_0^\infty c(t) \, v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} dt \tag{6}$$

2.2 Das Deckungskapital

Das Deckungskapital ist die Bezeichnung für einen versicherungsmathematisch berechneten Wert, der einem Versicherungsvertrag zu einem bestimmten Zeitpunkt des Versicherungsverlaufs zugeordnet wird. Es gibt verschiedene Darstellungsarten des Deckungskapitals. Die berühmtesten Vertreter sind die prospektive Darstellung und die retrospektive

Darstellung. Im weiteren Verlauf wird die prospektive Darstellung behandelt. Wichtig dabei ist der Begriff des zukünftigen Verlustes "L".

Definition 2.8 *${}_tL$ bezeichnet die Differenz aus künftigen Leistungen und künftigen Prämien zum Zeitpunkt t betrachtet und auf t diskontiert. ("zukünftiger Verlust zum Zeitpunkt t")*

Definition 2.9 *Es gilt das sogenannte Äquivalenzprinzip. D.h. zum Zeitpunkt $t = 0$ des Versicherungsvertrages gilt:* $\mathbb{E}[L] = 0$.

Definition 2.10 *Der Erwartungswert des zukünftigen Verlustes bezogen auf den Zeitpunkt t unter der Bedingung, dass der Versicherte zum Zeitpunkt t noch am Leben ist, heißt Deckungskapital. Es gilt:*

$$ {}_tV_x := \mathbb{E}[{}_tL_x | \, T_x > t] \tag{7}$$

Definition 2.11 *Das Deckungskapital (prospektive Darstellung) für eine allgemeine Versicherung mit Ablebensleistung c_t, Erlebensleistung e_t und Prämie P_t sieht wie folgt aus:*

$$ {}_tV_x = \sum_{k=0}^{\infty} c_{t+k+1} \, v^{k+1} \, {}_kp_{x+t} \, q_{x+k+t} - \sum_{k=0}^{\infty} (P_{k+t} + e_{k+t}) \, v^k \, {}_kp_{x+k} \tag{8}$$

Definition 2.12 *Das Deckungskapital einer n-jährigen Erlebensversicherung mit Prämien P einbezahlt für k Jahre, wobei $\ddot{a}_{x:k}$ eine vorschüssige k Jahre laufende Leibrente, ist gegeben durch:*

$$ {}_tV_x = \begin{cases} {}_{n-t}E_{x+t} - P\ddot{a}_{x+t:t-k} & t < k \\ {}_{n-t}E_{x+t} & t \geq k \end{cases} \tag{9}$$

2.3 Spar- und Risikoprämie

Satz 2.13 *Das Deckungskapital kann mit folgender Formel rekursiv berechnet werden:*

$$ {}_tV_x = v \, c_{t+1} \, q_{x+t} - \tilde{P}_t + v \, p_{x+t} \, {}_{t+1}V_x \tag{10}$$

Durch geschicktes Umformen obiger Rekursionsgleichung erhält man folgende Form für die Prämie $\tilde{\mathrm{P}}_t$:

$$ \tilde{\mathrm{P}}_t = (v \, {}_{t+1}V_x -_t V_x) + v \, q_{x+t} \, (c_{t+1} -_{t+1} V_x). \tag{11}$$

Diese Gleichung gibt insbesondere Auskunft über die Verwendung der Prämie (abzüglich der sofort bezahlten Erlebensleistungen). Ein Teil der Prämie wird dazu aufgewendet, das künftig benötigte Deckungskapital, vermindert um die vorhandene Reserve, bereitzustellen, dient also einem Ansparprozess. Der Rest dient der Vorsorge für den Todesfall. Im Todesfall wird noch $c_{t+1} -_{t+1} V_x$ benötigt, da ja die bis zum Zeitpunkt t+1 angesammelte Reserve vollständig verbraucht werden kann. Dieser Betrag wird Risikokapital genannt. Man definiert:

Definition 2.14 *Die Sparprämie ist definiert durch*

$$ \tilde{P}_t^S := v \, {}_{t+1}V_x -_t V_x \tag{12}$$

Definition 2.15 *Die Risikoprämie ist definiert durch*

$$ \tilde{P}_t^R := v \, q_{x+t} \, (c_{t+1} -_{t+1} V_x) \tag{13}$$

2.4 Die klassische Thielesche Differentialgleichung

Satz 2.16 *Die Nettoeinmalprämie einer lebenslangen stetigen Ablebensversicherung* $\bar{A}_x$ *genügt der folgenden Differentialgleichung*

$$\frac{\partial \bar{A}_x}{\partial x} = \bar{A}_x\,(\delta + \mu_x) - \mu_x \tag{14}$$

Beweis Ein Beweis dazu würde zu weit führen, findet sich aber z.B. im Skriptum Lebensversicherungsmathematik von Schachermayr/Schmock/Kusolitsch □

Interpretation der Thieleschen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \bar{A}_x}{\partial x} = \delta\,\bar{A}_x\, - \mu_x + \mu_x\,\bar{A}_x \tag{15}$$

Der erste Term auf der rechten Seite steht für die Verzinsung, der zweiten für die Todesfallleistung, und der dritten für das Anerbe.

3 Pure "Unit Linked"

In einem ersten Schritt werden wir Produkte betrachten, die von einer Wertschrift oder einem Fonds abhängen, und keine Garantie beinhalten. (Pure "Unit Linked")
Folgende Bezeichnungen werden dabei verwendet:

N(t) Anzahl der Leistungsanteile zur Zeit t

S(t) Wert eines Anteils zur Zeit t

Es gilt dabei, dass die Anzahl der Anteile deterministisch ist. Für eine reine Todesfallversicherung ergibt sich:

	Traditionell	(pure) Unit Linked
Auszahlung bei Todesfall	$C(t) = 1$	$C(t) = S(t)$
Wert (zur Zeit 0)	$\pi_0(t) = exp(-\delta t)$	$\pi_0(t) = S(0)$
		(sollte in vernünftiger Ökonomie so sein)
Einmalprämie	$\mathbb{E}[\int_0^T \pi_0(t) d(\mathcal{X} T_x \leq t)]$	$\mathbb{E}[\int_0^T \pi_0(t) d(\mathcal{X} T_x \leq t)]$
	$= \int_0^T exp(-\delta t)_t p_x \mu_{x+t} dt$	$= S(0) \int_0^T t p_x \mu_{x+t} dt$
		$= (1 -_T p_x) S(0)$

Es ist gut zu erkennen, dass das finanzielle Risiko des Versicherers bei einer fondsgebundenen Versicherung kleiner ist als bei einer traditionellen Lebensversicherung mit Zinsgarantie. Bei der Berechnung der Einmalprämie wird implizit angenommen, dass der zukünftige Wert des Fonds im Erwartungswert gleich dem Wert zum Zeitpunkt 0 ist. Daraus sieht man, dass man sich zuerst Gedanken über den Wert einer Wertschrift machen müssen.

Bis jetzt haben wir nur ein Produkt ohne Garantie betrachtet. Wie in der Einleitung schon kurz angeschnitten, werden heutzutage meist Versicherungen mit der Garantie verkauft, sodass der Versicherungsnehmer z.B. die einbezahlten Prämien unverzinst zurückerstattet bekommt. Eine Garantie kann wiefolgt ausschauen:

$$G(t) = \int_0^t \bar{p}(s) ds \tag{16}$$

p(s) bezeichnet die Prämiendichte zur Zeit s. Für die Auszahlungsfunktion C(t) gilt:

$$C(t) = \max(S(t), G(t)) \tag{17}$$

Wir nehmen nun an, dass sich der Wert des Fonds gemäß eines stochastischen Prozesses (mit Wahrscheinlichkeitsmaß P) auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ entwickelt. Was ist nun der Wert der diskontierten Auszahlung C(t) zur Zeit t?

$$\pi_0(C(t)) = \mathbb{E}^P[\max(S(t), G(t))] \tag{18}$$

Leider ist die Sache hier nicht so einfach. Wenn man den Wert auf diese Weise berechnet, kann man eventuell risikolosen Gewinn (Arbitrage) erzielen. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, ist es vonnöten ein zu P äquivalentes Martingalmaß zu finden, um Arbitragemöglichkeiten auszuschließen. Die Theorie der äquivalenten Martingalmaße ist ein zentrales Thema der Finanzmathematik. Geht man hier in unserem Beispiel von einem fairen Markt aus, gilt:

$$\pi_0(C(t)) = \mathbb{E}^Q[\max(S(t), G(t))] \tag{19}$$

wobei Q das zu P äquivalente Martingalmaß bezeichnet, unter dem der diskontierte Wert der zugrunde liegenden Sicherheit ein Martingal ist. Im folgenden Kapitel wird die "arbitrage free pricing"-Theorie, auf der die moderne Finanzmathematik aufbaut erläutert und die wichtigsten Konzepte vorgestellt.

4 Grundbegriffe der Finanzmathematik

In diesem Abschnitt wollen wir einen Einblick in die moderne Finanzmarkttheorie gewinnen. Da dieses Thema sehr umfangreich ist, werden hier nicht alle Details und Einzelheiten bewiesen, sondern eher die für das Verständnis wichtigsten und für unser Modell der fondsgebundenen Lebensversicherung notwendigen Grundlagen angeführt.

4.1 Modellierung von Aktienkursen, Optionen

Es stellt sich zuallererst die Frage, wie man Aktienkurse vernünftig modellieren kann. Dies geschieht am Besten mit einer geometrischen Brown'schen Bewegung $(S_t(\omega))$. Für das Verständnis dieser benötigt man die Brown'sche Bewegung, welche einer der wichtigsten stochastischen Prozesse ist.

Definition 4.1 (Brownsche Bewegung) *Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Für jedes* $\omega \in \Omega$ *nehmen wir an, dass es eine stetige Funktion* $W(t)_{t\geq 0}$ *gibt, die die Bedingung* $W(0) = 0$ *erfüllt. Dann wird* $W = W(t)_{t\geq 0}$ *Brown'sche Bewegung genannt, wenn folgendes erfüllt ist:*

1. $\forall\, 0 = t_0 < t_1 < \ldots$ *sind die Inkremente*

$$W_{t_1} = W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots \text{ unabhängig} \tag{20}$$

2. Alle Inkremente sind normalverteilt mit:

$$\mathbb{E}[W_{t_i} - W_{t_{i+1}}] = 0 \quad Var[W_{t_i} - W_{t_{i+1}}] = t_{i+1} - t_i \tag{21}$$

Hier ein Beispiel für 2 Pfade einer Brownschen Bewegung:

Filtration für die Brown'sche Bewegung:

Definition 4.2 *Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem eine Brown'sche Bewegung* $(W_t)_{t\geq 0}$ *definiert ist. Eine Filtration dieser Brown'schen Bewegung ist eine Ansammlung von* σ*-Algebren* $(\mathcal{F}_t)$*, die den folgenden Bedingungen genügen:*

1.Angesammelte Information:

$$\forall 0 \leq s \leq t : \textit{Jede Menge in } \mathcal{F}_s \textit{ ist auch in } \mathcal{F}_t \textit{ enthalten.} \tag{22}$$

2.Adaptivität:

$$\forall t \geq 0 : \ \textit{Die Brown'sche Bewegung zur Zeit } t \textit{ ist } \mathcal{F}_t \textit{ - messbar} \tag{23}$$

3.Unabhängigkeit von zukünftigen Inkrementen:

$$\forall 0 \leq t < u : W_u - W_t \textit{ ist unabhängig von } \mathcal{F}_t \tag{24}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten von Filtrationen für die Brownsche Bewegung:

- Filtration erzeugt durch die Brownsche Bewegung selbst.
- Filtration erzeugt durch die Brownsche Bewegung selbst und einem stochastischen Prozess, wobei die zusätzliche Information nichts über die Zukunft der Brown'schen Bewegung enthüllt.

Satz 4.3 *Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtration* $\mathcal{F}_t$*. Eine auf diesem Raum definierte Brown'sche Bewegung ist ein Martingal.*

Beweis z.z. ist die Martingaleigenschaft, also, dass der Erwartungswert einer Zufallsvariable zur Zeit t, bedingt durch die Filtration zu einer früheren Zeit gleich der Zufallsvariable zur früheren Zeit ist, also: $\mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] = W_s$

$\mathbb{E}[W_t - W_s + W_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[W_s | \mathcal{F}_s] = 0 + W_s = W_s.$ □

Definition 4.4 (Geometrische Brown'sche Bewegung) *Die geometrische Brownsche Bewegung* $(S_t(\omega))$ *setzt sich zusammen aus der Brown'schen Bewegung W(t), dem Aktienkurs zu Beginn (t=0), einem Driftterm* μ *und einer Volatilität* σ*:*

$$S(t) = S(0) \cdot \exp[\,(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)] \tag{25}$$

Neben dem Aktienkurs selbst sind auch noch Optionen interessant, Optionen sind Wertschriften, mit denen man das Recht, ein Wertpapier oder ein anderes Produkt zu einem späteren Zeitpunkt zu einem vorher vereinbarten Preis zu kaufen oder zu verkaufen, erhält. Es muss also nicht unbedingt ge- oder verkauft werden, sondern man kann die Option auch verfallen lassen. Daher wird eine Option auch als "bedingtes Termingeschäft" bezeichnet.

Die berühmtesten Vertreter sind:

-*Die europäische Call-Option*: Der Käufer hat das Recht, aber nicht die Pflicht, an einem bestimmten Zeitpunkt (T) einen bestimmten Basiswert (Underlying) zu einem im Voraus festgelegten Preis (Strike-Preis = c) in einer im Voraus festgelegten Menge zu kaufen. Der Wert zum Zeitpunkt T ist dabei:

$$H = \max(S_T - c, 0) \tag{26}$$

-*Die europäische Put-Option*: Der Inhaber einer Put-Option hat das Recht, aber nicht die Pflicht, zu einem bestimmten Zeitpunkt (T) eine festgelegte Menge eines bestimmten Basiswert zu einem im Voraus festgelegten Preis (Strike-price = c) zu verkaufen. Der Wert zum Zeitpunkt T ist dabei:

$$H = \max(c - S_T, 0) \tag{27}$$

-*Amerikanische Optionen*: Der Unterschied von amerikanischen Optionen zu europäischen Optionen liegt am Zeitpunkt der Ausübung. Während die europäische Option nur zu einem im vorhinein ausgemachten Zeitpunkt T ausgeübt werden kann, kann die amerikanische Option, zu jedem beliebigen Zeitpunkt ausgeübt werden, also wenn der Aktienkurs gerade sehr hoch ist. (bei einer Call-Option)

Eine Bank möchte nun gern den Wert einer Option zum Zeitpunkt 0 kennen. Wie im vorangegangenen Abschnitt erwähnt, führt dieser leider zu systematisch verfälschten Preisen. In vielen Fällen wäre es dann möglich, einen Gewinn zu erzielen ohne jegliches Risiko (Arbitrage).

4.2 Preissysteme

4.2.1 Diskrete Zeit

Wir wollen uns hier die einfachste Ökonomie betrachten.
Wir beschränken uns auf endliche Modelle, und diskrete Zeit. Wir verwenden bei unseren Betrachtungen immer einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, mit einer endlichen Grundgesamtheit Ω. Zusätzlich soll $P(\omega) > 0 \ \forall \omega \in \Omega$ gelten, und es sei ein endlicher Zeithorizont T fixiert, an dem alle Handelsgeschäfte aufhören. Wie schon vorhin bei der Brown'schen Bewegung betrachten wir eine Filtration $\mathcal{F}_t$, also eine σ-Algebra der verfügbaren Information zur Zeit t.

Den Verlauf von k $< \infty$ Wertschriften modellieren wir jeweils mittels eines stochastischen Prozesses $S^k \ \forall k$. Der Vektor S enthält den Verlauf der einzelnen Wertschriften zu den diskreten Zeitpunkten $\{0, 1, 2, \ldots, T\}$.

$$S = \{S_t, \ t = 0, 1, 2, \ldots, T\} \text{ mit Komponenten } S^0, S^1, \ldots, S^k. \tag{28}$$

Jedes S^j soll dabei bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ adaptiert sein, da man bei einer Wertschrift üblicherweise den Verlauf der Vergangenheit kennt, aber nicht den Verlauf in der Zukunft. Die 0.te Wertschrift meines Portfolios spielt eine besondere Rolle. Sie stellt eine risikolose

Anleihe, mit risikofreiem Zins r, dar. $S_t^0 = (1+r)^t$. Der risikolose Diskontierungsfakter β_t ist dann einfach der Kehrwert von S_t^0:

$$\beta_t = \frac{1}{S_t^0} = (1+r)^{-t} \tag{29}$$

Wichtig für das Verständniss sind auch die Begriffe Handelsstrategie und Portfolio:

Definition 4.5 (Handelsstrategie) *Eine Handelsstrategie (trading strategy) ist ein vorhersehbarer ($\phi_t \in \mathcal{F}_{t-1}$) Prozess $\Phi = \{\phi_t,\ t = 1, 2, \ldots, T\}$ mit Komponenten ϕ_t^k.*

ϕ_t^k bedeutet die Anzahl der Wertschriften k, welche wir zwischen $[t-1, t[$ besitzen. ϕ_t nennt man auch Portfolio zur Zeit t.

Notation 4.6 *Seien X, Y zwei vektorwertige stochastische Prozesse. Dann bezeichnen wir:*

$$< X_s, Y_t > = X_s \cdot X_t = \sum_{k=0}^{n} X_s^k \times Y_t^k \qquad \Delta X_t = X_t - X_{t-1} \tag{30}$$

Der Wert des Portfolios zur Zeit t ist:

Zeit	Wert des Portfolios
$t-1$	$\phi_t \cdot S_{t-1}$
t^-	$\phi_t \cdot S_t$

Das bedeutet, dass im Intervall $[t-1, t[$ der Gewinn $\phi_t \Delta S_t$ beträgt. Damit kann man sich den totalen Gewinn im Intervall $[0, t]$ ausrechnen:

$$G_t(\phi) = \sum_{\tau=1}^{t} \phi_\tau \cdot \Delta S_\tau \tag{31}$$

Wir setzen $G_0(\phi) = 0$ und nennen $(G_t)_{t\geq 0}$.

Satz 4.7 *G ist ein adaptierter, reellertiger stochastischer Prozess.*

Wir führen nun die Begriffe "selbstfinanzierend", und "zulässig" für eine Handelsstrategie ein.

Definition 4.8 *Eine Handelsstrategie ist selbstfinanzierend, falls*

$$\phi_t \cdot S_t = \phi_{t+1} \cdot S_t \qquad \forall t = 1, 2, \ldots, T-1 \tag{32}$$

Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie bedeutet, dass zu keiner Zeit Geld zugeführt oder abgezogen wird.

Definition 4.9 *Eine Handelsstrategie ist zulässig, falls sie einerseits selbstfinanzierend ist, und andererseits*

$$V_t(\phi) := \begin{cases} \phi_t \cdot S_t, & \text{falls } t = 1, 2, \ldots, T \\ \phi_1 \cdot S_0, & \text{falls } t = 0. \end{cases}$$

nicht negativ ist. Also der Wert der Handelsstrategie ist während der ganzen Laufzeit positiv. Man darf nicht Konkurs machen.
Bezeichnung: Φ ist die Menge der zulässigen Handelsstrategien.

Bemerkung 4.10 *Die Idee der zulässigen Handelsstrategien besteht darin, die Portfolios in der Zeit zu betrachten, die nicht zum Konkurs führen und bei denen zu keiner Zeit Geld zu- oder abgeführt wird. Dies bedeutet auch, dass der Wert dieser Handelsstrategie bei Umschichtungen immer gleich bleibt. (Vergleiche Analysis: absolute Konvergenz einer Reihe). Somit kann man den Preis einer Option bestimmen, falls sie denselben Zahlungsstrom erzeugt.*

Definition 4.11 *Unter einer Bezugsvariablen wollen wir eine positive Zufallsvariable X verstehen. Die Menge aller Bezugsvariablen bezeichnen wir mit $\mathcal{X}$.*

Die Zufallsvariable X ist erreichbar, falls es eine zulässige Handelsstrategie $\phi \in \Phi$ gibt, welche diese erzeugt, d.h.

$$V_T(\phi) = X \tag{33}$$

In diesem Fall sagt man "ϕ erzeugt X".

Definition 4.12 *Für eine erreichbare Bezugsvariable X, die durch ϕ erzeugt wird, bezeichnen wir mit*

$$\pi = V_0(\phi) \tag{34}$$

ihren Preis. (Dieser Preis muss nicht eindeutig sein, wie wir später sehen werden und entspricht dem Wert des Startportfeuilles)

4.2.2 Arbitrage

Wir sind in den letzten Kapiteln den Begriffen Arbitrage und arbitragefreies Maß bereits begegnet. Nun wollen wir diese Begriffe definieren und Überlegungen dazu anstellen:
Unter einer Arbitragemöglichkeit verstehen wir

$$\phi \in \Phi \text{ mit } V_0(\phi) = 0 \text{ und } V_T(\phi) \text{ positiv und } P[V_T(\phi) > 0] > 0 \tag{35}$$

Wenn es also eine solche Strategie geben würde, könnte man Geld aus Nichts erschaffen, bzw. Profit ohne jegliches Risiko machen. Das wichtigste Axiom der modernen Finanzmathematik ist die Absenz von Arbitragemöglichkeiten. Damit lassen sich wichtige Erkenntnisse zur Bestimmung der Preise gewinnen.

Definition 4.13 *Unter einem Arbitrage Portfolio verstehen wir ein Portfolio, dass zur Zeit t nichts kostet, und zur Zeit $T > t$ sicher keine negative Auszahlung, aber mit positiver Wahrscheinlichkeit eine positive Auszahlung hat.*

Lemma 4.14 *In einem arbitrage-freien Markt kann ein Wertpapier zu einem gegebenen Zeitpunkt nur einen Preis haben.*

Beweis Angenommen ein Wertpapier hat Preise a,b. O.B.d.A. sei a $<$ b, dann kann man das Wertpapier um a kaufen, und um b wieder verkaufen und hat einen risikolosen Gewinn. Dies führt zu einem Widerspruch zu der Annahme, dass es sich um einen arbitrage-freien Markt handelt. $\square$

Als nächstes wollen wir uns ansehen, was unter einem Preissystem zu verstehen ist:

Definition 4.15 (Preissystem) *Eine Abbildung*

$$\pi: \mathcal{X} \to [0, \infty[, \qquad X \to \pi(X) \tag{36}$$

heißt genau dann Preissystem, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $\pi(X) = 0 <=> X = 0$
- π *ist linear.*

Ein Preissystem nennt man konsistent, falls

$$\pi(V_T(\phi)) = V_0(\phi) \qquad \textit{für alle } \phi \in \Phi \tag{37}$$

Mit Π *bezeichnen wir die Menge der konsistenten Preissysteme. Mit* $\mathbb{P}$ *bezeichnen wir die Menge*

$$\mathbb{P} = \{Q \textit{ Maß äquivalent zu P, unter welchem } \beta \times S \textit{ ein Martingal ist}\} \tag{38}$$

wobei β *den Diskontierungsfaktor (vgl. Abschnitt vorher) von der Zeit t nach 0 bezeichnet. Die Maße* $\mu \in \mathbb{P}$ *heissen* ***äquivalente Martingalmaße***

Satz 4.16 *Zwischen den Mengen der konsistenten Preissysteme* $\pi \in \Pi$ *und den Maßen* $Q \in \mathbb{P}$ *existiert eine Bijektion, definiert durch*

1.$\pi(X) = \mathbb{E}^Q[\beta_T X]$

2.$Q(A) = \pi(S_T^0 \mathcal{X}_A)$ *für alle* $A \in \mathcal{A}$.

Beweis Für $Q \in \mathbb{P}$ definieren wir $\pi(X) = \mathbb{E}^Q[\beta_T X]$. π ist ein Preissystem, weil P auf Ω strikt positiv und Q zu P äquivalent ist. Es bleibt also zu zeigen, dass π konsistent ist. Sei hierzu $\pi \in \Pi$. Dann gilt: $\beta_T V_T(\phi) =$

$= \beta_T \phi_T S_T + \sum_{i=1}^{T-1} (\phi_i - \phi_{i+1}) \beta_i S_i$

$= \beta_1 \phi_1 S_1 + \sum_{i=1}^{T} \phi_i (\beta_i S_i - \beta_{i-1} S_{i-1})$,

,womit wir verwendet haben, dass ϕ selbstfinanzierend ist. Somit ist $\pi(V_T(\phi)) =$

$= \mathbb{E}^Q[\beta_T V_T(\phi)]$

$= \mathbb{E}^Q[\beta_1 \phi_1 S_1] + \mathbb{E}^Q[\sum_{i=2}^{T} \phi_i (\beta_i S_i - \beta_{i-1} S_{i-1})]$

$= \mathbb{E}^Q[\beta_1\phi_1 S_1] + \sum_{i=2}^T \mathbb{E}^Q[\phi_i \mathbb{E}^Q[(\beta_i S_i - \beta_{i-1}S_{i-1})|\,\mathcal{F}_{i-1}]]$

$= \phi_1 \mathbb{E}^Q[\beta_1 S_1]$

$= \phi_1 \beta_0 S_0,$

Wobei wir verwendet haben, dass ϕ vorhersehbar ist, und dass β S unter Q ein Martingal ist. Somit haben wir bewiesen, dass π ein konsistentes Preissystem ist.

Sei nun $\pi \in \Pi$ ein konsistentes Preissystem und Q definiert wie oben. Dann ist $Q(\omega) = \pi(S_t^0 \mathcal{X}(\omega)) > 0$, für alle $\omega \in \Omega$, da $S_t^0 \mathcal{X}(\omega) \neq 0$. Weiterhin ist $\pi(X) = 0 <=> X = 0$ und somit ist Q absolut stetig bezüglich P.

Als Nächstes wollen wir zeigen, dass es sich bei Q um ein Wahrscheinlichkeitsmaß handelt. Wir definieren hierzu:

$$\phi^0 = 1 \qquad \text{und} \qquad \phi^k = 0 \;\; \forall k \neq 0.$$

Da ϕ konsistent ist gilt

$1 = V_0(\phi)$
$= \pi((V_T(\phi))$
$= \pi(S_T^0 \cdot 1)$
$= Q(\Omega).$

Da die Preise auf positiven Bezugsvariablen positiv sind, und da Ω additiv ist, folgen die Kolmogorovschen Axiome (*), da Ω endlich ist. Per Definition gilt $Q(\omega) = \pi(S_T^0 \cdot \mathcal{X}\{\omega\})$ und somit auch

$$\mathbb{E}[f] = \sum_\omega \pi(S_T^0 \cdot \mathcal{X}(\omega) \cdot f(\omega) = \pi(S_T^0 \cdot \sum_\omega f(\omega)).$$

Für $f = \beta_T X$ gilt also

$$\mathbb{E}^Q[\beta_T X] = \pi(S_T^0 \cdot \beta_T \cdot X) = \pi(X).$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\beta_T S_T^k$ für alle k ein Martingal ist. Sei k eine Koordinate und τ eine Stoppzeit. Wir definieren

$\phi_t^0 = \mathcal{X}_{t \leq \tau},$
$\phi_t^0 = (\frac{S_\tau^k}{S_{tau}^0})\mathcal{X}_{t > \tau}.$

(Man hält bis zur Zeit τ die Wertschrift k und investiert dann den Erlös in eine risikofreie Anlage.) Es ist einfach zu zeigen, dass die Strategie ϕ sowohl vorhersehbar als auch selbstfinanzierend ist. Es gelten die folgenden Gleichungen

$V_0(\phi) = S_0^k,$

$V_T(\phi) = (\frac{S^k_\tau}{S^0_\tau})S^0_T$

und weiterhin

$S^k_0 = \pi(S^0_T \cdot \beta_\tau \cdot S^k_\tau)$
$= \mathbb{E}^Q[\beta_\tau \cdot S^k_\tau]$.

Da die obigen Gleichung für eine beliebige Stoppzeit τ gilt, ist $\beta_T S^k_T$ ein Martingal bezüglich Q. □

(*) Zur Erinnerung:

Definition 4.17 (Kolmogorov Axiome) *Sei* $(\Omega, \mathcal{A})$ *ein Ereignisraum. Eine Funktion P heißt Wahrscheinlichkeitsmaß über* $\mathcal{A}$*, wenn gilt:*

(K1) $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$
(K2) $0 \leq P(A) \leq 1 \forall A \in (A)$
(K3) $P(\Omega) = 1$ *Normierungsbedingung*
(K4) $P(\sum_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$, *wenn* (A_k) *paarweise disjunkt ist.*

Folgende zwei Sätze werden ohne Beweis angegeben, Beweise dazu finden sich in der Literatur.

Satz 4.18 *Folgende drei Aussagen sind äquivalent:*

1. Das Marktmodell lässt keine Arbitrage zu
2. $\mathbb{P} \neq \emptyset$
3. $\Pi \neq \emptyset$

Der Satz besagt, dass es wenn der Markt arbitragefrei ist mindestens ein äquivalentes Martingalmaß und ein konsistentes Preissystem gibt. Es gelten jeweils auch die Umkehrschlüsse, was diesen Satz sehr wichtig macht.

Lemma 4.19 *Falls es eine selbstfinanzierende Strategie* $\phi \in \Phi$ *mit*

$$V_0(\phi) = 0,\ V_T(\phi) \geq 0,\ \mathbb{E}[V_T(\phi)] > 0 \tag{39}$$

gibt, lässt das Marktmodell arbitrage zu.

4.2.3 Stetige Zeit

Für Modelle in stetiger Zeit beschränken wir uns auf Aussagen, und verweisen für Beweise, die großteils sehr aufwendig sind, auf die Literatur. Ein großer Unterschied zum diskreten Fall besteht beim stetigen Fall darin, dass $\mathbb{P} \neq \emptyset$. Viele Begriffe, die wir im diskreten Fall schon betrachtet haben, gibt es auch im stetigen Fall, sie sind allerdings hier etwas komplizierter:

Definition 4.20 *Unter einer Handelsstrategie* ϕ *verstehen wir einen lokal beschränkten vorhersehbaren Prozess.*

Definition 4.21 *Unter dem der Handelsstrategie ϕ zugeordneten Wertschöpfungsprozess V verstehen wir:*

$$V : \Pi \to \mathbb{R},\ \phi \to V(\phi) = \phi_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^{k} \phi_t^i \cdot S_t^i. \tag{40}$$

Unter dem Gewinnprozess G verstehen wir:

$$G : \Pi \to \mathbb{R},\ \phi \to G(\phi) = \int_0^\tau \phi\, dS = \int_0^\tau \sum_{i=0}^{k} \phi^i dS^i \tag{41}$$

Definition 4.22 *ϕ ist selbstfinanzierend, falls $V_t(\phi) = V_0(\phi) + G_t(\phi)$.*

Notation 4.23 *Für die Definition der zulässigen Handelsstrategie verwenden wir folgende Notation:*

$Z_t^i = \beta_t \cdot S_t^i$,	*Diskontierter Wert von Aktie i*
$G^*(\phi) = \int \sum_{i=1}^k \phi^i dZ^i$,	*Diskontierter Gewinn*
$V^*(\phi) = \beta V(\phi) = \phi^0 + \sum_{i=1}^k \phi^i Z^i$.	

Definition 4.24 *Eine Handelsstrategie heisst zulässig, wenn folgendes erfüllt ist:*

1. $V^*(\phi) \geq 0$,
2. $V^*(\phi) = V^*(\phi)_0 + G^*(\phi)$
3. $V^*(\phi)$ *ist ein Martingal unter* Q.

Satz 4.25 *Es gilt:*

1. Der Preis einer Bezugsgröße X ist gegeben durch $\pi(X) = \mathbb{E}[\beta_T X]$
2. Die Bezugsgröße ist erreichbar <=> $V^* = V_o^* + \int HdZ\ \ \forall H$.

Definition 4.26 *Der Markt ist vollständig, falls jede integrierbare Bezugsgröße erreichbar ist.*

4.3 Das ökonomische Modell

Wie schon im Kapitel "Modellierung von Aktienkursen, Optionen" beschrieben, verwenden wir als zugrunde liegendes Modell die geometrische Brownsche Bewegung. Dies ist nötig, um den Preis einer Option berechnen zu können. Zusätzlich zu den Wertpapierkursen, und der Optionsberechnung, müssen wir nun in unserem Modell der fondsgebundenen Lebensversicherung auch die zukünftige Lebensdauer T_x betrachten. Wir werden für diese beiden Modelle jeweils eine zugrunde liegende σ-Algebra betracheten und die Unabhängigkeit dieser fordern.

Notation 4.27 *Wir verwenden für den Rest dieses Kapitels folgende Bezichnungen und Konventionen:*

- T_x bezeichnet die zukünftige Lebensdauer eines x-jährigen.

- Mit $\mathcal{H}_t = \sigma(T > s, 0 \leq s \leq t)$ bezeichnen wir die von T_x erzeugten σ-Algebren

- Für die Wertschriften nehmen wir für den Rest dieses Kapitels an, dass sich das Referenzportfeuille gemäß W einer standardisierten Brownschen Bewegung entwickelt.

- Mit $\mathcal{G}_t$ bezeichnen wir die von W erzeugten σ-Algebren, erweitert um die P-Nullmengen.

Definition 4.28 (Unabhängigkeit von Finanzvariablen) *Es gilt:*

- Wir nehmen an, dass $\mathcal{G}_t$ und $\mathcal{H}_t$ stochastisch unabhängig sind. Dies bedeutet, dass die Finanzvariablen unabhängig von der künftigen Lebensdauer sind.

- Mit $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{G}_t, \mathcal{H}_t)$ bezeichnen wir die von $\mathcal{G}_t$ und $\mathcal{H}_t$ erzeugte σ-Algebra.

4.3.1 Black-Scholes Modell

Definition 4.29 (Black-Scholes-Marktmodell)

$$B(t) = \exp(\delta t) \qquad \textit{Risikofreie Anleihe} \tag{42}$$

$$S(t) = S(0)\exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)] \qquad \textit{Fonds modelliert durch geometrische BB} \tag{43}$$

Satz 4.30 *Die Zufallsvariable S löst folgende stochastische Differentialgleichung*

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \tag{44}$$

Beweis Der Beweis zu dieser Aussage wird später nachgebracht, dafür ist Kenntnis über Itô-Integrale nötig. □

Hier sind wieder die diskontierten Werte des mit der geometrischen Brownschen Bewegung modellierten Fonds von Bedeutung:

$$B^* = \frac{B(t)}{B(t)} = 1 \tag{45}$$

$$S^*(t) = \frac{S(t)}{B(t)} = S(0)\exp[(\mu - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)] \tag{46}$$

Nachdem wir die Anlagemöglichkeiten definiert haben, und deren diskontierte Werte berechnet haben, müssen wir zur Berechnung der Einmaleinlagen der fondsgebundenen Produkte ein äquivalentes Martingalmaß bestimmen. Wir müssen also ein Maß Q so bestimmen, dass S^* ein Martingal unter Q ist.

Den nächsten Satz wollen wir nur angeben, und nicht beweisen. Es ist eine Folgerung des wichtigen Satzes von Girsanow, der sich mit dem Maßwechsels von dem kanonischen Maß P zu dem äquivalenten Martingalmaß Q beschäftigt.

Satz 4.31

$$\hat{W}_t = W(t) + \frac{\mu - \delta}{\sigma} t \tag{47}$$

ist unter $Q = \zeta \cdot P$ eine standardisierte Brownsche Bewegung, wobei

$$\zeta_t = \exp\Big(- \frac{1}{2}\big(\frac{\mu - \delta}{\sigma}\big)^2 t - \frac{\mu - \delta}{\sigma} W(t)\Big) \tag{48}$$

für alle $t \in [0, T]$

Mithilfe dieser Transformation, können wir nun ein Martingalmaß für S^* finden:

Satz 4.32

$$S^*(t) = S(0)\exp\Big(- \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\,\hat{W}(t)\Big) \tag{49}$$

ist ein Martingal unter Q.

Beweis Für $t, u \in \mathbb{R}, u > t$ ist folgende Gleichheit zu beweisen:

$$\mathbb{E}^Q[S^*(u)|\,\mathcal{F}_t] = S^*(t) \tag{50}$$

Hierzu verwenden wir die folgende Notation: $u = t + \Delta t, W_u = W_t + \Delta W$ und $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$\mathbb{E}^Q[S^*(u)|\,\mathcal{F}_t]$

$= \mathbb{E}^Q[S(0)\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t) + (-\frac{1}{2}\sigma^2 \Delta t + \sigma \Delta W))|\,\mathcal{F}_t]$

$= S^*(0)\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t))\mathbb{E}^Q[\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 \Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} Z|\,\mathcal{F}_t]$

$= S^*(t)$.

Somit ist Q ein zu P äquivalentes Maß, unter dem S^* ein Martingal ist. □

Satz 4.33 *In der oben definierten Ökonomie, gegeben durch $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, S und B, beträgt der Preis einer Todesfallsumme C(T) zur Zeit t:*

$$\pi_t(T) = \mathbb{E}^Q[\exp(-\delta(T - t)C(T))|\,\mathcal{F}_t] \tag{51}$$

Der wichtigste Unterschied im Vergleich zum klassischen Modell besteht darin, dass der Erwartungswert nicht bezüglich P, sondern bezüglich dem äquivalenten Maß Q berechnet werden muss. Im folgenden betrachten wir wieder eine Erlebens- und eine Ablebensversicherung, wobei wir nun die neuen Erkenntnisse verwenden:

Satz 4.34 ***Erlebensversicherung:***

$$V(0) = \mathbb{E}^Q[\exp(-\delta T)C(T)]\,{}_Tp_x \tag{52}$$

Satz 4.35 ***Temporäre Ablebensversicherung:***

$$V(0) = \int_0^T \mathbb{E}^Q[\exp(-\delta t)C(t)]\,{}_Tp_x\,\mu_{x+t}\,dt \tag{53}$$

5 Berechnung der nötigen Einmaleinlagen

Bisher haben wir in unserem Modell keine garantierte Leistung für den Versicherungsnehmer berücksichtigt. Dies wird aber in der Praxis sehr oft so gehandhabt. Im folgenden sehen wir, was mit einer "unit-linked" - Versicherung passiert, wenn wir zusätzlich eine Garantie versprechen. Als Notation verwenden wir dabei:

$C(\tau)$	Versicherungssumme zur Zeit τ
$N(\tau)$	Anzahl Fondsanteile zur Zeit τ
$S(\tau)$	Kurs der Wertschriften zur Zeit τ
$G(\tau)$	Garantierte Leistung zur Zeit τ

es gilt: $C(\tau) = \max\{N(\tau)S(\tau), G(\tau)\}$

5.1 Erlebensversicherung

Satz 5.1 *Gegeben ist das Black-Scholes-Modell. Dann ist die Nettoeinmalprämie für eine reine Erlebensversicherung in der Höhe von*

$$C(T) = \max\{N(T)S(T), G(T)\} \tag{54}$$

gegeben durch

$${}_TG_x = {}_Tp_x\,[G(T)\exp(-\delta T)\Phi(-d_2^0(T)) + S(0)N(T)\Phi(d_1^0(T))] \tag{55}$$

wobei

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} \exp(-\frac{x^2}{2})dx, \tag{56}$$

$$d_1^t(s) = \frac{\ln[\frac{N(s)S(t)}{G(s)}] + (\delta + \frac{1}{2}\sigma^2)(s-t)}{\sigma\sqrt{s-t}}\ , (s > t), \tag{57}$$

$$d_2^t(s) = \frac{\ln[\frac{N(s)S(t)}{G(s)}] + (\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)(s-t)}{\sigma\sqrt{s-t}} \text{ , } (s > t). \tag{58}$$

Beweis Im Folgenden bezeichnen wir mit J* stets den diskontierten Wert der Zufallsvariablen J. Der Wert der Erlebensleistung zur Zeit Null beträgt $\mathbb{E}^Q[C^*(T)]$. Wir bezeichnen mit $Z = S^*(T)$. Dann gilt:

$$_TG_x = {}_Tp_x \, \mathbb{E}^Q[\max\{N(T)Z, G^*(T)\}]$$

und

$$Z = S(0)\exp\big(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma \hat{\mathrm{W}}(\mathrm{T})\big) \qquad \text{mit} \qquad \hat{\mathrm{W}}(\mathrm{T}) \sim \mathcal{N}(0, T)$$

Somit erhalten wir:

$$_TG_x = {}_Tp_x \int_{-\infty}^{\infty} \max[N(T)S(0)\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\zeta), G^*(T)]\, f(\zeta)\, d\zeta,$$
$$\text{mit } f(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\big(-\frac{1}{2T}\zeta^2\big).$$

Als Nächstes setzen wir $\bar{\zeta} = \frac{1}{\sigma}[\ln[\frac{G^*(T)}{N(T)S(0)}] + \frac{1}{2}\sigma^2 T]$ und bemerken, dass falls $\zeta > \bar{\zeta}$ auch $N(T)Z > G^*(T)$. Dies bedeutet, dass sich die Einmaleinlage wie folgt berechnen lässt:

$$\begin{aligned} _TG_x &= {}_Tp_x\Big(G^*(T)\int_{-\infty}^{\bar{\zeta}} f(\zeta)\, d\zeta \\ &+ N(T)S(0)\int_{\bar{\zeta}}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta\Big) \\ &= {}_Tp_x\Big(G^*(T)\int_{-\infty}^{\bar{\zeta}} f(\zeta)\, d\zeta \\ &+ N(T)S(0)\int_{\bar{\zeta}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp(-\frac{1}{2T}(\zeta - \sigma T)^2\, f(\zeta)\, d\zeta\Big). \end{aligned}$$

Aus der obigen Gleichung folgt durch Vereinfachung der Terme das gewünschte Resultat. □

5.2 Ablebensversicherung

Satz 5.2 *Gegeben ist das Black-Scholes-Modell. Dann ist die Nettoeinmalprämie für eine temporäre Ablebensversicherung in der Höhe von*

$$C(T) = \max\{N(T)S(T), G(T)\} \tag{59}$$

gegeben durch

$$G^1_{x:T} = \int_0^T (G(t)\exp(-\delta t)\Phi(-d_2^0(t)) + S(0)N(t)\Phi(d_1^0(t))\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\,)\, dt, \tag{60}$$

wobei

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx, \tag{61}$$

$$d_1^t(s) = \frac{\ln[\frac{N(s)S(t)}{G(s)}] + (\delta + \frac{1}{2}\sigma^2)(s-t)}{\sigma\sqrt{s-t}}\ , (s > t), \tag{62}$$

$$d_2^t(s) = \frac{\ln[\frac{N(s)S(t)}{G(s)}] + (\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)(s-t)}{\sigma\sqrt{s-t}}\ , (s > t). \tag{63}$$

6 Die Thielesche Differentialgleichung

6.1 Prämienberechnung und Deckungskapital

Um die Thielesche Differentialgleichung herleiten zu können, müssen wir erst die Prämien für diesen Versicherungstyp einführen. $\bar{p}(t)$ bezeichnet hier die Prämiendichte zur Zeit t. Wegen dem Äquivalenzprinzip, dass uns schon aus der klassischen Lebensversicherungsmathematik bekannt ist, gelten folgende Gleichungen:

$${}_TG_x = \int_0^T \bar{p}(t)\exp(-\delta t)\, {}_tp_x\, dt \tag{64}$$

beziehungsweise in anderer Notation:

$$G^1_{x:T} = \int_0^T \bar{p}(t)\exp(-\delta t)\, {}_tp_x\, dt \tag{65}$$

Mithilfe der Prämien können wir uns nun das Deckungskapital fondsgebundenen Versicherung ansehen. Zur Erinnerung: Deckungskapital ist der Erwartungswert des zukünftigen Verlustes bezogen auf den Zeitpunkt t unter der Bedingung, dass der Versicherte zum Zeitpunkt t noch am Leben ist. Wir betrachten dabei wieder getrennt Erlebensversicherung und temporäre Ablebensversicherung:

Erlebensversicherung:

$$V(t) = {}_{T-t}p_{x+t}\, \pi_t(T) - \int_t^T (\bar{p}(\zeta)\exp(-\delta(\zeta - t))\, {}_{\zeta-t}p_{x+t}\, d\zeta \tag{66}$$

temporäre Ablebensversicherung:

$$V(t) = \int_t^T \pi_t(\zeta)\, \mu_{x+\zeta}\ {}_{\zeta-t}p_{x+t}\, (\zeta - t) - \bar{p}(\zeta) \exp(-\delta(\zeta - t))_{\zeta-t}p_{x+t}\, d\zeta \tag{67}$$

wobei:

$$\pi_t(s) = G(s) \exp(-\delta(s-t))\Phi(-d_2^t(s)) + N(s)S(t)\Phi(d_1^t(s)) \tag{68}$$

und

$$f(x+t) = \mu(x+t) \cdot (1 - F(x+t)) = \mu(x+t)\ {}_xp_0\ {}_tp_x \tag{69}$$

Die Definition von $d_1^t(s)$ und $d_2^t(s)$ findet sich im letzten Abschnitt.

Bemerkung 6.1 *Die Reserven sind nicht wie im klassischen Fall deterministisch, sondern hängen vom Wert der zugrunde liegenden Wertschrift S ab.*

6.2 Itô-Kalkül

Für den Beweis der Thieleschen Differentialgleichung im klassischen Fall reicht es aus, über deterministische Differentialgleichungen Bescheid zu wissen. Bei "unit-linked"-Produkten müssen wir aber zusätzlich den Wert unserer Wertschrift $\pi_t(s)$ betrachten, der leider nicht deterministisch ist. Daher brauchen wir stochastische Differentialgleichungen, und die Theorie von Itô, allerdings werden hier keine Beweise angegeben, da dies zu weit führen würde.

Satz 6.2 (Itô-Formel) *Sei $W(t)_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess, und f eine (zumindest 2 mal) stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt:*

In Differential-Schreibweise:

$$df(W(t)) = f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f''(W(t))dt \tag{70}$$

In Integral-Schreibweise:

$$f(W(T)) - f(W(0)) = \int_0^T f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}\int_0^T f''(W(t))dt \tag{71}$$

wobei das erste Integral ein Itô-Integral, also ein stochastisches Integral, ist und das zweite ein Lebesgue-Integral

Da in unserem Fall vorallem die Brownsche Bewegung $W(t))_{t\geq 0}$ wichtig ist, formulieren wir die Itô-Formel für die Brownsche Bewegung:

Satz 6.3 *Betrachte eine Funktion f(t,x), für die die partiellen Ableitungen $f_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}f(t,x)$, $f_x(t,x)$, $f_{xx}(t,x)$ sind wohldefiniert und stetig $[f \in C^{1,2}([0,T],\mathbb{R})]$.*
Betrachte eine Brownsche Bewegung $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Dann gilt für jedes fixe $T \geq 0$:

$$f(T, W(T)) = f(0, W(0)) + \int_0^T f_t(t, W(t))\, dt + \int_0^T f_x(t, W(t))\, dW(t) + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, W(t))\, dt \tag{72}$$

oder in Differential-Schreibweise:

$$df(t, W(t)) = f_t(t, W(t))\,dt + f_x(t, W(t))\,dW(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, W(t))\,dt \tag{73}$$

Formelle Bedingungen des Itô-Kalküls:

$$[W, W](t) = dW(t)\,dW(t) = dt \qquad dW(t)\,dt = dt\,dW(t) = 0 \qquad dt\,dt = 0 \tag{74}$$

Definition 6.4 (Itô-Prozess) *Sei $W(t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ eine angepasste Filtration. Dann ist ein Itô-Prozess ein stochastischer Prozess von der Form*

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \Delta(u)dW(u) + \int_0^t \Theta(u)du \tag{75}$$

wobei X_0 nicht zufällig ist, und $\Delta(u)$ und $\Theta(u)$ angepasste stochastische Prozesse sind, die folgenden Bedingungen genügen

$$[\int_0^t \Delta^2(u)du] < \infty \qquad \int_0^t |\Theta(u)|\,du < \infty \ \ \forall t \geq 0 \ \textit{fast sicher} \tag{76}$$

Nun bringen wir noch den Beweis zu *Satz 4.6* nach, den wir nun mit der Theorie zu Itô-Integralen leicht durchführen können:

Beweis
Zu zeigen ist, dass S gegeben ist durch folgende Formel:
$S(t) = S(0)\exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)]$
Ich verwende dabei $dS = \mu S dt + \sigma S dW$ und die Itô-Formel für $f(t, x) = d\ \ln(S(t))$:

$f(t, x) = \ln(S(t))$
$f_x(t, x) = \frac{1}{x}$
$f_{xx}(t, x) = -\frac{1}{x^2}$

$dS(t)\,dS(t) = \mu^2(t)S(t)^2 dt\,dt + \sigma^2(t)S(t)^2 dW(t)\,dW(t) + 0$
(gemischten Terme $dW(t)\,d(t)$ und $d(t)\,dW(t)$ fallen weg) $= \sigma^2(t)S(t)^2 dt$.

$d(f(t, x)) = f_x(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X(t))dX(t)\,dX(t)$

$= \frac{1}{S(t)} dS(t) - \frac{1}{2 \cdot S(t)^2} dS(t)\,dS(t)$

$= \frac{1}{S(t)}(\mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t)) - \frac{1}{2 \cdot S(t)^2} \cdot \sigma^2(t)S(t)^2 dt$

$= (\mu(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t))dt + \sigma(t)dW(t)$. Dies ist aber genau die gesuchte Formel. $\square$

6.3 Thielesche Differentialgleichung

Satz 6.5 (Thielesche Differentialgleichung) *:*

1.Die Differentialgleichung für den Marktwert einer reinen Erlebensversicherung lautet:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \bar{p}(t) + (\mu_{x+t} + \delta)\, V(t) - \frac{1}{2}\, \sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \delta S(t) \frac{\partial V}{\partial S} \tag{77}$$

2. Die Differentialgleichung für den Marktwert einer temporären Ablebensversicherung lautet:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \bar{p}(t) + (\mu_{x+t} + \delta)\, V(t) - C(t)\, \mu_{x+t} - \frac{1}{2}\, \sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \delta S(t) \frac{\partial V}{\partial S} \tag{78}$$

Bemerkung 6.6 *Es gibt dabei folgende Extremfälle:*
1. Wenn man $\mu_{x+t} = \bar{p}(t) = 0$ setzt $\forall t$ erhält man genau die Black-Scholes-Formel. Ohne Prämien und Sterblichkeit, hat die Thielesche Differentialgleichung nichts mehr mit einer Versicherung gemeinsam, sondern ich betrachte nur mehr meinen Fonds, und der istja genau mit der Black-Scholes-Formel modelliert.

2. Die ersten Terme der Thieleschen Differentialgleichung entsprechen dem klassischen Fall einer Lebensversicherung. Dies bedeutet Abhängigkeit von den Prämien, Sterblichkeit, und dem Zins. Wenn also die hinteren Terme alle 0 sind bin ich beim klassischen Fall. Die hinteren Terme $-\frac{1}{2}\, \sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \delta S(t) \frac{\partial V}{\partial S}$ beschreiben die Fluktuation des zugrunde liegenden Wertpapieres.

Wir beweisen die Thielesche Differentialgleichung für den Fall der Erlebensversicherung. Der Beweis für die temporäre Alebensversicherung funktioniert sehr ähnlich.

Beweis

$$\text{Da} \qquad \pi^*_t(T) = \exp(-\delta t)\pi_t(T),$$

folgt aus der Definition von V die folgende Gleichung:

$$V(t) = {}_{T-t}p_{x+t}\, \pi^*_t(T) \exp(\delta t) - \int_t^T \bar{p}(\zeta) \exp(-\delta(\zeta - t))\, {}_{\zeta-t}p_{x+t}\, d\zeta$$

und somit

$$\pi_t(T) = \phi(t) \Big[V(t) + \int_t^T \bar{p}(\zeta) \exp(-\delta(\zeta - t))\, {}_{\zeta-t}p_{x+t}\, d\zeta \Big],$$

wobei

$$\phi(t) = \frac{\exp(-\delta t)}{{}_{T-t}p_{x+t}}$$

Da π^*_t eine Funktion von S und t ist, können wir die Itô-Formel auf die Funktion $\pi^*_t(t, S)$ anwenden:

$$\begin{aligned} dY_t &= U_t\, dt + U_x\, dX_t + \frac{1}{2} U_{xx} b^2\, dt \\ &= U_t\, dt + \frac{1}{2} U_{xx} b^2\, dt + U_x b\, dB_t \end{aligned}$$

und erhalten:

$$d\pi^* = \Big(\frac{\partial \pi^*}{\partial t} + \frac{\partial \pi^*}{\partial S}\, a + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \pi^*}{\partial S^2}\, b^2\Big)\, dt + \frac{\partial \pi^*}{\partial S}\, b\, d\hat{\mathrm{W}},$$

wobei wir wissen, dass

$$dS = \delta S(t)\, dt + \sigma S(t) d\, \hat{\mathrm{W}}.$$

Somit ist $a = \delta S(t)$ und $b = \sigma S(t)$. Als Nächstes wollen wir die verschiedenen Terme für die obige Formel bestimmen:

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial S} = \phi(t)\frac{\partial V}{\partial S}$$
$$\frac{\partial^2 \pi^*}{\partial S^2} = \phi(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

Um $\frac{\partial \pi^*}{\partial t}$ herzuleiten, berechnen wir zuerst:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\, {}_{\zeta-t}p_{x+t} &= \mu_{x+t}\, {}_{\zeta-t}p_{x+t} \\ \frac{\partial}{\partial t}\phi(t) &= \frac{-\delta \exp(-\delta t)\, {}_{T-t}p_{x+t} - \exp(-\delta t)\, {}_{T-t}p_{x+t}\, \mu_{x+t}}{({}_{T-t}p_{x+t})^2} \\ &= -(\mu_{x+t} + \delta) \cdot \frac{\exp(-\delta t)}{{}_{T-t}p_{x+t}} \\ &= -(\mu_{x+t} + \delta) \cdot \phi(t). \end{aligned}$$

Setzt man nun die obigen Terme ein, erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi^*}{\partial t} &= \frac{\partial \phi}{\partial t}\Big(V(t) + \int_t^T \bar{p}(\zeta) \exp(-\delta(\zeta - t))\, {}_{\zeta-t}p_{x+t}\, dt\Big) \\ &+\phi(t)\Big(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\int_t^T \bar{p}(\zeta) \exp(-\delta(\zeta - t))\, {}_{\zeta-t}p_{x+t}\, dt\Big) \\ &= \phi(t)\Big(\frac{\partial V}{\partial t} - (\mu_{x+t} + \delta)V(t) - \bar{p}(t)\Big), \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Kettenregel auf den Term

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_t^T \bar{p}(\zeta) \exp(-\delta(\zeta - t))\, {}_{\zeta-t}p_{x+t}\, dt$$

Wir erhalten schließlich:

$$\begin{aligned} \pi_s^*(T) &= \pi_t^*(T) + \int_t^s \phi(\zeta)\frac{\partial V}{\partial S}\sigma S\, d\hat{\mathrm{W}}(\zeta) \\ + \int_t^s \phi(\zeta)\Big[&\frac{\partial V}{\partial S}\delta S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 S}{\partial S^2} - (\mu_{x+t} + \delta)V(\zeta) + \frac{\partial V}{\partial t}(\zeta) - \bar{p}(\zeta)\Big]\, d\zeta \end{aligned}$$

Da $\pi_{\cdot}^*(T)$ ein Martingal ist, muss der Driftterm verschwinden. Wir erhalten das gewünschte Resultat:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \bar{p}(t) + (\mu_{x+t} + \delta)V(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 S}{\partial S^2} - \delta S(t)\frac{\partial V}{\partial S}$$

$\square$

6.4 Analyse der Risiko- und Sparprämie

Der Wert $[c(t) - V(t)]$ wird "unbedeckte Menge" (engl. uncovered amount) genannt. Die Risikoprämie in Bezug auf Lebensversicherungen ist definiert als $\mu_{x+t}[c(t) - V(t)]$ d.h. die bedingte erwartete Zahlung des Überschusses des Deckungskapitals. Für Risiko- und Sparprämie wird folgende Notation verwendet:

$$\bar{p}_t^m \qquad \text{Risikoprämie}$$
$$\bar{p}_t^s \qquad \text{Sparprämie}$$

Für die fondsgebundene Erlebensversicherung gilt:

$$\bar{p}_t^m = -V(t)\,\mu_{x+t} \tag{79}$$

Für die fondsgebundene temporäre Ablebensversicherung gilt:

$$\bar{p}_t^m = [c(t) - V(t)]\,\mu_{x+t} \tag{80}$$

Die Sparprämie ist der Teil der Prämie, der durch die Fluktuation des zugrundeliegenden Wertpapieres beeinflusst wird. Mittels der Thieleschen Differentialgleichung erhalten wir als Sparprämie sowohl für die fondsgebundene Erlebensversicherung als auch für die Ablebensversicherung:

$$\bar{p}_t^s = \{\frac{\partial V}{\partial t} - rV(t)\} + \frac{1}{2}\,\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \delta S(t) \frac{\partial V}{\partial S} \tag{81}$$

Literatur

[F] Gunther Leobacher: *Skriptum zur Vorlesung: Finanzmathematik 1*, JKU Linz, WS 06/07

[S] Steven E. Shreve: *Stochastic Calculus for Finance II*, Springer-Verlag, New York 2004

[KI] Rüdiger Kiesel: *Skriptum Course Notes: Financial Methods in Insurance*, University of Ulm, 14.August 2006

[KO] Michael Koller: *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung*, Springer-Verlag, Berlin 200

[G] Hans U. Gerber: *Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag, Third Edition

[S] Schachermayer/Schmock/Kusolitsch: *Skriptum Lebensversicherungsmathematik*, TU Wien, 31.Oktober 2003