TU Wien

Zinsderivate

Seminar der Finanz- und Versicherungsmathematik

Philipp Schmöger

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Zinsderivate sind Finanzinstrumente, deren Auszahlung in irgendeiner Art und Weise von einem Zinssatz abhängen. In den 80er und 90er Jahren ist das Handelsvolumen von Zinsderivaten sowohl an den Börsen, als auch am Freiverkehrsmarkt rapide gestiegen. Immer neuere und ausgeklügeltere Produkte wurden entwickelt, um den speziellen Bedürfnissen der Endverbraucher entgegenzukommen.

Deswegen ist die Entwicklung von Verfahren zur Preisbestimmung und Bewertung solcher Finanzinstrumente eine zentrale Aufgabe für die Derivativhändler. Dies ist jedoch oft nicht so einfach, da Zinsderivate aus mehreren Gründen schwieriger zu bewerten sind als Aktien- und Devisenderivate:

1. Das Verhalten eines einzelnen Zinsderivats ist komplexer als das von Aktien- oder Wechselkursen.
2. Um die Produkte robust zu bewerten, muss ein Modell zur Beschreibung des Verhaltens der <u>gesamten</u> Ertragskurve gebildet werden.
3. Das Risikomaß an verschiedenen Punkten auf der Ertragskurve ist unterschiedlich.
4. Zinssätze bestimmen nicht nur die Auszahlung des Derivats, sondern werden auch zum Abzinsen verwendet.

In den folgenden Abschnitten werden zwei Punkte untersucht. Zuerst werden die Eigenschaften der Derivate betrachten, denen man in der Praxis am häufigsten begegnet. Anschließend wird der allgemeine Rahmen zur Verfügung gestellt, innerhalb dessen alle Derivate bewertet und abgesichert werden können.

2 Derivate

2.1 Allgemein

Definition Ein Derivat ist ein Finanzinstrument, dessen Auszahlung an die Werte anderer Variablen, den sogenannten *Underlyings*, gebunden ist. Solche *Underlyings* können Wertpapiere, Aktienindizes, Waren oder ähnliches sein.

Das Wachstum der Derivativmärkte in den letzten 10 Jahren zählt zu den aufregendsten Entwicklungen im Finanzwesen, zumal sie einerseits zum Absichern von Risiken, andererseits zum Eingehen von Risiken (spekulieren) verwendet werden können. Sowohl für Hedger, die mit Derivaten Risiko minimieren möchten, als auch für Spekulanten, die sich durch Kursschwankungen Vorteile schaffen wollen, stellt ein Derivat oft ein viel interessanteres Objekt dar als der Vermögenswert selbst.

Derivate werden zum einen als standardisiertes Finanzinstrument an Derivatbörsen gehandelt, wobei die Bedingungen für Derivate von den jeweiligen Börsen selbst festgelegt werden.
Zum anderen wird auch am *Freiverkehrsmarkt* gehandelt. Dieser sogenannte *OTC*-Handel (*over-the-counter*, "über den Tresen") stellt das größte Handelsvolumen und beschreibt den außerbörslichen Handel zwischen den Finanzinstituten via Telefon oder Internet, ohne eine börsenähnliche Institution einzuschalten. Diese dort gehandelten Produkte sind im Allgemeinen nicht standardisiert und können individuell gestaltet werden.

Die folgenden Abschnitte behandeln die wichtigsten Standard-Derivate.

2.2 Standard Derivate

2.2.1 Forwardkontrakte

Definition Ein Forwardkontrakt ist eine Vereinbarung, die den Inhaber verpflichtet, einen Vermögenswert zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt zu einem bestimmten Preis zu kaufen oder zu verkaufen.

Der Käufer nimmt dabei die sogenannte *long*-Position ein, der Verkäufer die *short*-Position. Das Gegenstück zu einem Forwardkontrakt ist der *Kassavertrag*, der eine Vereinbarung ist, einen Vermögenswert heute zu kaufen oder zu verkaufen.

Definition Der Lieferpreis ist der Preis in einem Forwardkontrakt bei Vertragsabschluss, der zum Lieferzeitpunkt für den Vermögenswert bezahlt wird.

Dieser wird so berechnet, dass keiner der Vertragspartner einen Gewinn erwarten kann und Arbitrage verhindert. Der Wert eines Forwardkontrakts bei Vertragsabschluss ist demnach 0.

Definition Der Forwardpreis für einen Forwardkontrakt zu einem bestimmten Zeitpunkt entspricht dem Lieferpreis, der verwendet werden würde, wenn der Vertrag zu diesem Zeitpunkt eingegangen werden würde.

Daher ist der zu verwendende Lieferpreis folgendermaßen anzusetzen:

$$F_0 = S_0 e^{-rT} \tag{2.1}$$

S_k ist dabei der *Spot*-Preis, also der Preis, den der Vermögenswert zur Zeit k wirklich besitzt, r der risikolose Zinssatz und T die verbleibende Zeit bis zum Lieferzeitpunkt.
Der aufgezinste Spot-Preis ergibt also den Forwardpreis zur Zeit 0.

Natürlich verändert sich der Wert des Kontrakts mit der Zeit, da der Lieferpreis des Vermögenswertes bis zum Lieferzeitpunkt variiert. Der Wert eines Forwards in der long-Position zur Zeit k ist:

$$f_k = (F_k - K)e^{-rT} \tag{2.2}$$

F_k ist der Forwardpreis zur Zeit k und K der im Kontrakt vereinbarte Lieferpreis, welcher F_0 entspricht.
Durch Vertauschen von F_k und K erhält man den Wert einer short-Position.

Bemerkung Folgende vereinfachte Annahmen wurden in diesem Kapitel getroffen:

1. Keine Transaktionskosten
2. Keine Lagerkosten
3. Gleicher risikoloser Zinssatz zum Geld Leihen wie auch Geld Verleihen
4. *Short selling* (Leerverkäufe) erlaubt, d.h. man kann short-Position in einen Forwardkontrakt eingehen, ohne diesen zu besitzen, um ihn zu einem späteren Zeitpunkt zurückzukaufen
5. Der Wert eines Underlyings berücksichtigt nicht den Nutzen für den Besitzer

2.2.2 Futureskontrakte

Da Forwardkontrakte sich als nützlich herausstellten, versuchte man bald solche Verträge zu standardisieren, um sie auf Börsen organisierbar und handelbar zu machen.

Definition Ein Futureskontrakt ist ein standardisiertes Abkommen zwischen zwei Beteiligten, einen Vermögenswert in der Zukunft zu einem bestimmten Preis zu kaufen oder zu verkaufen.

Im Gegensatz zu Forwardkontrakte werden Futureskontrakte normalerweise an Börsen gehandelt. Dabei werden bestimmte standardisierte Merkmale angenommen, um den Handel zwischen den Vertragspartner, die sich nicht notwendigerweise kennen müssen, zu ermöglichen und erleichtern. Außerdem ist bei einem Futureskontrakt der Liefertermin nicht genau spezifiziert und verweist meistens auf ein Liefermonat. Dabei hat der Inhaber der Verkaufsposition das Recht, den exakten Lieferzeitpunkt innerhalb des Monats zu wählen.

Das Standardisieren und Einschränken auf Liefermonate ermöglicht das tägliche Handeln dieser Kontrakte an den Börsen, da die Bereitstellung von Forwardpreisen für alle Zeitpunkte nicht darstellbar wäre. Das Verfahren zum Justieren der Futurespreise an der Börse nennt man *marking to market*:
Während der gesamten Laufzeit wird der Futurespreis täglich zum aktuellen Marktpreis des Futures berechnet (marked to market), sodass deren Wert immer 0 beträgt. Steigt nun beispielsweise der Preis des Futureskontrakts, so bekommen alle Teilnehmer in einer long-Position des Futures einen Betrag in Höhe der Preisänderung auf ihr Konto gutgeschrieben. Jedem Inhaber einer short-Position wird dieser Betrag hingegen abgezogen. So hat jeder Besitzer einer long/short-Position den selben Vertrag. Zum Lieferzeitpunkt beträgt der Lieferpreis den Futurespreis zu diesem Zeitpunkt, welcher sich erheblich vom Futurespreis zum Erwerbszeitunkt unterscheiden kann.

Bei einem Futureskontrakt erfolgen, im Gegensatz zu Forwardkontrakten, tägliche Zahlungen, was garantiert, dass der Inhaber seine Verpflichtungen einhält.

Bemerkung Der Futurespreis konvergiert gegen Ende der Laufzeit gegen den Kassakurs (Spotkurs) des Basisobjektes.

2.2.3 Optionen

Definition Eine <u>europäische Option</u> gibt seinem Besitzer das Recht, aber nicht die Pflicht, zu einem gewissen Zeitpunkt das Underlying für einen gewissen Preis zu kaufen (Call) oder zu verkaufen (Put).

Der Preis in dem Kontrakt wird als *Basispreis*, das Datum der Ausübungsmöglichkeit *Fälligkeitsdatum* bezeichnet. Natürlich wird der Inhaber einer Option diese nur dann ausüben und wahrnehmen, wenn er daraus einen Vorteil für sich erzielen kann. Der Besitzer einer Kaufoption zum Beispiel wird den Vermögenswert zum Fälligkeitsdatum nur dann um den festgeschriebenen Basispreis K kaufen und so die Option ziehen, wenn der zu diesem Zeitpunkt herrschende Spot-Preis des Underlyings S_T über dem Basispreis K liegt. Daraus ergeben sich folgende Auszahlungen:

Auszahlung europ. Call-Option: $(S_T - K)^+$
Auszahlung europ. Put-Option: $(K - S_T)^+$

2.2.4 Swaps

Definition Ein Swap ist eine Vereinbarung zwischen zweier Vertragspartner, Zahlungsströme über einen gewissen Zeitraum zu tauschen.

Die Attraktivität dieses Produkts sieht man daran, dass der Swap Markt mehrere hundert Milliarden Dollar "schwer" ist.

Der populärste und häufigste Swap ist der sogenannte *Plain Vanilla Swap*. Dabei wird ein variabler Zinssatz wie EURIBOR oder LIBOR gegen einen fixen Zinssatz getauscht oder umgekehrt. Mit solch einem Swap kann man sich unter anderem gegen das Risiko schwankender Zinsen absichern.

3 Zinsderivate

Definition Ein Zinsderivat ist ein Derivat, dessen Auszahlung in irgendeiner Art und Weise von einem Zinssatz abhängt.

Das Handelsvolumen von Zinsderivaten ist in den 80er und 90 er Jahren stark angestiegen, weswegen das Entwickeln von Verfahren zur Bewertung und Absicherung dieser Produkte immer wichtiger wurde. Wie bereits erwähnt erweisen sich diese jedoch schwieriger zu bewerten als Aktien- und Währungsderivate.

In den kommenden Kapiteln werden die drei am weitesten verbreiteten OTC-Zinsderivate betrachtet und bewertet.

3.1 Das Black- und Black-Scholes-Modell

3.1.1 Black-Scholes-Modell

Das Black-Scholes-Modell wurde im Jahre 1973 veröffentlicht und ist zu einem weit verbreiteten Hilfsmittel zur Preisbestimmung von Optionen auf Währungen, Aktienindizes und Futureskontrakte geworden. Dabei nehmen Aktienkurse log-normale Eigenschaften an. Das Modell wurde erweitert, sodass es dann zur Bewertung von Optionen und Futurekontrakte verwendet werden kann.
Die folgenden Formeln zur Bewertung europäischer Optionen nennt man *Black-Scholes-Formeln*:

Sei c der Preis einer europäischen Call-, p der Preis einer europäischen Putoption, S_0 der Wert des Underlyings der Option zum Zeitpunkt 0, K der Ausübungspreis, σ die Volatilität (ein Maß für die Unsicherheit der Rendite des Vermögenswerts), T die Restzeit bis zum Ausübungszeitpunkt, S_T logarithmisch normalverteilt und $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung an der Stelle x.
Dann gilt:

$$c = S_0\Phi(d_1) - e^{-rT}K\Phi(d_2) \tag{3.1}$$

$$p = e^{-rT}K\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1) \tag{3.2}$$

$$\text{mit} \quad d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln(\frac{S_0}{e^{-rT}K}) \pm \frac{1}{2}\sigma^2 T)$$

Beweis Zu zeigen:

$$E[(S_T - K)^+] = E[S_T]\Phi(d_1) - K\Phi(d_2) \tag{3.3}$$

mit

$$d_{1,2} = \frac{1}{w}(\ln(\frac{E[S_T]}{K}) \pm \frac{w^2}{2})$$

Dabei ist w die Standardabweichung von $\ln S_T$. Wegen S_T log-normalverteilt gilt $E[S_T] = e^{m+\frac{w^2}{2}}$. Für $\ln S_T$ bekommt man den Erwartungswert $m = \ln(E[S_T]) - \frac{w^2}{2}$ und die Varianz w^2.
Deshalb ist $V = \frac{\ln(S_T)-m}{w}$ standardnormalverteilt mit Dichtefunktion $\varphi(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{V^2}{2}}$.
So folgt durch Umschreiben und Einsetzen:

$$\begin{aligned} E[(S_T - K)^+] &= \int_K^\infty (S_T - K)g(S_T)dS_T = \\ &= \int_{\frac{\ln(K)-m}{w}}^\infty (e^{m+wV} - K)\varphi(V)dV = \\ &= \int_{\frac{\ln(K)-m}{w}}^\infty e^{m+wV}\varphi(V)dV - K\int_{\frac{\ln(K)-m}{w}}^\infty \varphi(V)dV \end{aligned}$$

Wird die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung eingesetzt und die Exponentialfunktionen zusammengezogen, so bekommt man durch quadratisches Ergänzen die Dichte $\varphi(V-w)$ und es folgt aus obigen Integralen:

$$\underbrace{e^{m+\frac{w^2}{2}}}_{E[S_T]}\underbrace{\int_{\frac{\ln(K)-m}{w}}^\infty \varphi(V-w)dV}_{\Phi(d_1)} - K\underbrace{\int_{\frac{\ln(K)-m}{w}}^\infty \varphi(V)dV}_{\Phi(d_2)}$$

$\Phi(d_2)$ ist leicht zu erkennen, da das 1. Integral wegen der Symmetrie gleich $1-\Phi(\frac{\ln(K)-m}{w} - w) = \Phi(\frac{-\ln(K)+m}{w} + w)$ ist. Setzt man num m ein so erhält man $\Phi(d_1)$. Analoges gilt für $\Phi(d_2)$.

□

Für eine Verkaufsoption benötigt man gleichartige Schritte.

3.1.2 Das Modell von Black

Die Händler haben sich mit der dem Modell zugrundeliegenden Annahme der logarithmischen Normalverteilung sowie des Volatilitätsmaßes angefreundet. Somit war es keine Überraschung, dass das Modell um Zinsderivate erweitert wurde. Ausgangspunkt waren die Formeln von Fisher Black zur Bewertung von Rohstoff-Futures.

Betrachtet man eine europäische Kaufoption auf eine Variable V. Dabei sei V_T, der Wert von V zum Zeitpunkt T, log-normalverteilt , die Standardabweichung von lnV_T gleich

$\sigma\sqrt{T}$ und $E[V_T] = F_0$. F_0 sei der Wert des Forward-Preises von V zum Zeitpunkt 0, $P[0,T]$ der Wert einer Nullkupon-Anleihe, die zum Zeitpunkt T den Betrag 1 ausbezahlt ("Diskontierungsfaktor").
Die Option mit Ausübungspreis K hat zum Zeitpunkt T eine Auszahlung von $(V_T - K)^+$. Bereits aus dem vorherigen Kapitel folgt, dass die erwartete Auszahlung der Kaufoption

$$E[V_T]\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)$$

ist, mit

$$d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(ln(\frac{E[V_T]}{K}) \pm \frac{1}{2}\sigma^2 T)$$

Da $E[V_T] = F_0$ angenommen - der erwartete Gewinn soll gleich 0 sein - und mit dem risikolosen Zinssatz diskontiert wird, beläuft sich der Wert der Option auf

$$c = P[0,T](F_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)) \tag{3.4}$$

$$p = P[0,T](K\Phi(-d_2) - F_0\Phi(-d_1)) \tag{3.5}$$

$$\text{mit} \quad d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln(\frac{F_0}{K}) \pm \frac{1}{2}\sigma^2 T)$$

Für den Fall, dass die Auszahlung aus dem Wert der Variablen V zum Zeitpunkt T berechnet wird, aber tatsächlich zu einem späteren Zeitpunkt T^* erfolgt, erhält man folgende Formeln:

$$c = P[0,T^*](F_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)) \tag{3.6}$$

$$p = P[0,T^*](K\Phi(-d_2) - F_0\Phi(-d_1)) \tag{3.7}$$

$$\text{mit} \quad d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln(\frac{F_0}{K}) \pm \frac{1}{2}\sigma^2 T)$$

Der Zusammenhang zu den Black-Scholes-Formeln ist ersichtlich, wenn man $P[0,T] = e^{-rT}$ und $S_0 = F_0 e^{-rT}$ setzt.

Die Gültigkeit des Black-Modells

Bei konsistenten oder deterministischen Zinssätzen treten im Black-Modell keine Probleme auf. Dabei entspricht der Forward-Preis von V seinem Futures-Preis und es gilt $E[S_T] = V_0$ in einer risikoneutralen Welt.
Wenn die Zinssätze jedoch stochastisch sind, gibt es zwei Aspekte, die zu klären sind:

1. Der Forward-Preis entspricht nicht dem Futures-Preis, da letzterer täglich neu ermittelt wird. Warum wird $E[V_T]$ gleich dem Forward-Preis F_0 gesetzt?

2. Warum ignoriert man beim Diskontieren die Tatsache, dass die Zinssaätze stochastisch sind?

Bei der Anwendung auf Anleiheoption, Caps/Floors und Swaptions wird ersichtlich, dass sich die beiden Annahmen ausgleichen und das Modell keine Näherungslösungen, sondern exakte Ergebnisse liefert.

3.2 Anleiheoption

Definition Eine Anleiheoption ist eine Option auf den Kauf oder Verkauf einer bestimmten Anleihe zu einem bestimmten Zeitpunkt.

3.2.1 Eingebettete Anleiheoptionen

Bei einer eingebetteten Anleiheoption handelt es sich um eine Option, die in der Anleihebedingung fest verankert ist. Zweck einer solchen Option ist meist die Steigerung der Attraktivität für den Emittenten oder Käufer.

Callable Bond

Ein Callable Bond ist ein Beispiel für eine eingebettete Anleiheoption, die dem Emittenten der Anleihe ermöglicht, die ausgegebene Anleihe gegen einen vorher vereinbarten Preis zu bestimmten zukünftigen Zeitpunkten zurückzukaufen. Der Inhaber einer solchen Anleihe hat dem Emittenten also eine Kaufoption verkauft. Gewöhnlich sind Callable Bonds mit einer Sperrfrist ausgestattet, die in den ersten Jahren der Laufzeit das Ausüben der Option verbietet. Danach ist der Basispreis im Allgemeinen eine fallende Funktion.
Der Wert der Kaufoption spiegelt sich in der Anleiherendite wider. Durch das Kaufrecht des Emittenten erzielt ein Callable Bond üblicherweise eine höhere Rendite.

Putable Bond

Ein Putable Bond ist das Gegenstück zum Callable Bond. In diesem Fall besitzt der Käufer der Anleihe Ausübungsrechte, die es ihm gestatten, zu gewissen zukünftigen Zeitpunkten den vorzeitigen Rückkauf der Anleihe gegen einen zuvor vereinbarten Preis zu verlangen. Er hat sozusagen eine Verkaufsoption vom Emittenten erworben. Da diese einen höheren Wert für den Inhaber darstellt, bieten Putable Bonds üblicherweise eine eher geringere Rendite. Bankeinlagen und Kredite enthalten häufig eingebettete Anleiheoptionen. Eine mehrjährige Einlage bei einem Finanzinstitut, beispielsweise, die jederzeit ohne Einbußungen gekündigt werden kann, enthält eine amerikanische Verkaufsoption auf die Anleihe.

3.2.2 Europäische Anleiheoptionen

Eine europäische Anleiheoption ist eine Kauf- bzw. Verkaufsoption einer Anleihe zu einem gewissen Zeitpunkt zu einem gewissen Preis.

Es wird angenommen, dass der Anleihepreis bei Fälligkeit der Option log-normalverteilt ist.Wird der Forward-Preis F_0 gleich dem Forward-Anleihepreis F_B, sowie die Volatilität σ gleich der Volatilität des Forward-Anleihepreises σ_B gesetzt, können die bereits bekannten Formeln des Black-Modelles zur Berechnung des Optionspreises verwendet werden. Die Standardabweichung des Logarithmus des Anleihepreises zur Fälligkeit der Option sei wie gehabt $\sigma_B\sqrt{T}$. Dann erhählt man folgende Gleichungen für europäische Anleiheoptionen:

$$c = P[0,T](F_B\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)) \tag{3.8}$$
$$p = P[0,T](K\Phi(-d_2) - F_B\Phi(-d_1)) \tag{3.9}$$

$$\text{mit} \quad d_{1,2} = \frac{1}{\sigma_B\sqrt{T}}(\ln(\frac{F_B}{K}) \pm \frac{1}{2}\sigma_B^2 T) \quad \text{und} \quad F_B = \frac{B_0 - I}{P[0,T]}$$

Dabei ist B_0 der Anleihepreis zum Zeitpunkt null und I der Barwert der Kuponzahlungen, die während der Laufzeit der Option gezahlt werden.

3.2.3 Theoretische Begründung

In einer Forward-risikoneutralen Welt gelangt man zu folgenden Ergebnissen:

1. Man erhält den gegenwärtigen Preis eines beliebigen Wertpapiers, indem man den Erwartungswert zum Zeitpunkt t_{k+1} bildet und ihn mit dem Preis der zum Zeitpunkt t_{k+1} fälligen Nullkuponanleihe multipliziert:

$$c = P[0,T]E_T[(B_T - K)^+] \tag{3.10}$$

mit B_T als Anleihepreis zum Zeitpunkt T und E_T als Erwartungswert in einer Forward-risikoneutralen Welt bezüglich einer in T fälligen Nullkupon-Anleihe.

2. Der Erwartungswert einer beliebigen Variable in dieser Welt, der zum Zeitpunkt t_k gilt, ist gleich dem Forward Wert: $E_T[B_T] = F_B$.

Unter der Annahme, dass der Anleihepreis log-normalverteilt ist, und mit Hilfe der Gleichung (3.3) bringt man den Preis der Kaufoption (3.10) auf die Form:

$$c = P[0,T](E_T[B_T]\Phi(d_1) - K\Phi(d_2))$$

mit

$$d_{1,2} = \frac{1}{\sigma_B\sqrt{T}}(\ln(\frac{E_T[B_T]}{K}) \pm \frac{1}{2}\sigma_B^2 T)$$

Unter Benützung des 2. Punktes erreicht man die Formel des Black-Modells. Analoges gilt auch für die Verkaufsoption.
Dies zeigt, dass man in einer risikoneutralen Welt den heutige Zinssatz zum Diskontieren verwenden kann, wenn man den erwarteten Anleihepreis dem Forward-Anleihepreis gleichsetzt.

3.3 Zinscaps und Zinsfloors

3.3.1 Zinscaps

Definition Ein Zinscap (Vereinbarung einer Zinsobergrenze) ist ein Finanzinstrument, welches dem Käufer nur dann eine Ausschüttung gewährt, wenn ein variabler Referenzzinssatz R_k die sogenannte Cap-Rate R_K (vorher festgelegte Zinsobergrenze) übersteigt. Die Auszahlungshöhe hängt davon ab, um wieviel der Referenzzinsatz die Cap-Rate überschreitet.

Ein Zinscap kann als Absicherung gegen einen Anstieg der Zinssätze aufgefasst werden. Der variable Referenzzinsatz, an dem sich die Anleihe orientiert, ist oftmals ein Interbankenzinsatz wie der EURIBOR (European-Interbanking-Offering-Rate) oder LIBOR (London-Interbanking-Offering-Rate). Als *Tenor* bezeichnet man die Zeit zwischen den Zinsanpassungen.

Beispiel Ein Kreditnehmer vereinbart mit seiner Bank, dass der Zinssatz seines Kredits mit Nominalbetrag L an den 3-Monats-EURIBOR-Zinssatz angepasst wird. Dies bedeutet, dass sich die Höhe des Zinssatzes seines Kredits alle 3 Monate ändert. Zur Absicherung gegen zu hohe Zinsen erwirbt der Kreditnehmer einen Zinscap zum Zeitpunkt 0 für T Jahre. Seien t_k, $k \in 1, 2, \ldots, T - \frac{1}{4}$ die Zinssatzanpassungstermine mit Tenor $\delta_k = t_{k+1} - t_k = \frac{1}{4}$. Der erste Termin nach dem Erwerb des Zinscaps t_1 ist dementsprechend nach 3 Monaten, der zweite nach 6 Monaten usw.. Liegt nun zu irgendeinem Zinsanpassungstermin $t_{\tilde{k}}$ der variable Referenzzinsatz $R_{\tilde{k}}$ über der Cape-Rate R_K, so wird die Differenz bezüglich des Nominalbetrages L dem Besitzer des Zinscaps zum nächsten Zinsanpassungstermin $t_{\tilde{k}+1}$ ausbezahlt.

Zinscap als Portfolio von Zinsoptionen

Sei T die Laufzeit eines Zinscaps mit Anpassungsterminen $t_1, \dots, t_n$ und $t_{n+1} = T$, $\delta_k = (t_{k+1} - t_k)$ der Tenor, L der Nominalbetrag, R_k der zum Zeitpunkt t_k beobachtete und für das Intervall $[t_k, t_{k+1})$ gültige Referenzzinsatz (z.B. EURIBOR-Zinssatz), dann beträgt die Auszahlung zum Zeitpunkt t_{k+1}:

$$L\delta_k(R_k - R_K)^+$$

Man bezeichnet dies als *Caplet* und entspricht einer Kaufoption auf den zur Zeit t_k beobachteten Referenzzinsatzes.

Dies bedeutet, dass man einen Zinscap als Zusammensetzung von n solcher Caplets, also von n Kaufoptionen betrachten kann.

3.3.2 Zinsfloors

Ein Zinsfloor ist das Gegenstück zum Zinscap.

Definition Ein Zinsfloor ist ein Finanzinstrument, das dem Käufer nur dann eine Auszahlung gewährt, wenn der variable Referenzzinssatz R_k unter einen bestimmten Wert fällt. Die Auszahlungshöhe hängt dann von der Höhe der Unterschreitung ab.

Ein Zinsfloor kann als Absicherung gegen zu niedrige Zinsen aufgefasst werden.

Bei gleicher Notation führt der Floor zum Zeitpunkt t_{k+1} eine Auszahlung von:

$$L\delta_k(R_K - R_k)^+$$

Dies entspricht einer Verkaufsoption auf den zum Zeitpunkt t_k beobachteten Referenzzinssatzes und wird als *Floorlet* bezeichnet.
Man kann einen Zinsfloor als n solcher Floorlets, also als Portfolio von n Verkaufsoptionen betrachten.

3.3.3 Collar

Ein Collar ist eine Kombination aus einer Kaufposition in einem Zinscap und einer Verkaufsposition in einem Floor. Dabei ist es üblich, dass zu Beginn der Preis des Caps gleich dem Preis des Floors ist, sodass die Kosten für den Einstieg in einen Collar in diesem Fall 0 ist.

3.3.4 Put-Call-Parität für Caps und Floors

Es gelten folgende Voraussetzungen:
Alle Finanzinstrumente haben dieselbe Laufzeit und dieselben Anpassungstermine, Cap und Floor die selbe Zinsschranke R_K sowie den selben Referenzzinsatz, in diesem Fall der EURIBOR-Zinssatz. Der Swap, eine Abmachung zum Tausch eines variablen Zinssatzes gegen einen fixen Zinssatzes, ist hier eine Vereinbarung zum Erhalt von EURIBOR und der Zahlung eines fixen Zinssatzes R_K, ohne den Austausch der Zahlungen zum ersten Anpassunstermin. Dann existiert eine Put-Call-Parität zwischen den Preisen von Zinscaps und Zinsfloors:

Wert des Caps - Wert des Floors = Wert des Swaps.

Dazu muss man eine Kaufposition im Cap mit einer Verkaufsposition im Floor kombinieren:

Sei EURIBOR $> R_K$:	Cap - Floor = (EURIBOR - R_K) - 0 = Wert des Swaps
Sei EURIBOR $< R_K$:	Cap - Floor = 0 - (R_K - EURIBOR) = Wert des Swaps

Durch die Einnahme von unterschiedlichen Positionen des Zinscaps und Zinsfloors ergibt der Swap den gleichen Zahlungsstrom wie Cap und Floor zusammen.

3.3.5 Bewertung von Caps und Floors

Wie in den vorherigen Abschnitten gezeigt, ergibt sich bei einem Cap die Auszahlung zum Zeitpunkt t_k von $L\delta_k(R_k - R_K)^+$. Berücksichtig man nun eine logarithmische Normalverteilung des zum Zeitpunkt t_k beobachteten Zins R_k mit der Volatilität σ_k, ergibt sich für einen Caplet bzw. analog für einen Floorlet:

$$L\delta_k P[0, t_{k+1}](F_k\Phi(d_1) - R_K\Phi(d_2)) \tag{3.11}$$

$$L\delta_k P[0, t_{k+1}](R_K\Phi(-d_2) - F_k\Phi(-d_1)) \tag{3.12}$$

mit

$$d_{1,2} = \frac{1}{\sigma_k\sqrt{t_k}}(\ln(\frac{F_k}{R_K}) \pm \frac{1}{2}\sigma_k^2 t_k)$$

F_k wird *Forward Rate* genannt und bezeichnet den Zinssatz, der für den Zeitabschnitt zwischen t_k und t_{k+1} erwartet wird.

Es muss jedes Caplet eines Caps bzw. Floorlet eines Floors separat berechnet werden. Dabei hat man entweder die Möglichkeit, für jedes Caplet/Floorlet eine andere Volatilität zu verwenden, die sogenannten *Spot-Volatilitäten*. Man kann aber auch alternativ für alle Caplets/Floorlets eine gemeinsame Volatilität (*Flat-Volatilität*) anwenden, die von der

Laufzeit des Caps/Floors abhängt.

Der typische Verlauf für Spot- und Flat-Volatilitäten als Funktion der Laufzeit weißt ein Anstieg der Volatilitäten bis zur Laufzeit von 2-3 Jahren und fällt dann je länger die Laufzeit.

3.3.6 Theoretische Begründung

Mit der Annahme einer Forward-risikoneutralen Welt bezüglich einer Nullkuponanleihe gelangt man zu folgenden Ergebnissen:

1. Man erhält den gegenwärtigen Preis eines beliebigen Wertpapiers, indem man den Erwartungswert zum Zeitpunkt t_{k+1} bildet und ihn mit dem Preis des zum Zeitpunkt t_{k+1} fälligen Nullkuponanleihe multipliziert:

$$L\delta_k P[0, t_{k+1}]E[(R_k - R_K, 0)^+]$$

2. Der Erwartungswert des Zinssatzes, der zum Zeitpunkt t_k gilt, ist gleich der Forward Rate: $E[R_k] = F_k$.

Man erhält die Formeln (3.10) und (3.11) zur Bewertung eines Caplets/Floorlets, indem man auf den Preis der Kaufoption (1.Punkt) Gleichung (3.3) anwendet und den Forward-Anleihepreis aus Punkt 2 einsetzt. Voraussetzung dafür ist natürlich die Annahme, dass der beobachtete Zinssatz log-normalverteilt ist.

Man kann also durch das Gleichsetzen vom Forward-Zinssatz und dem erwarteten Zinssatz den heutigen Zinssatz zur Diskontierung verwenden, ohne die Konsistenz zu verlieren.

3.4 Swaptions

Definition Europäische Swaptions sind Optionen auf Zinsswaps. Sie gibt also dem Inhaber das Recht, aber nicht die Pflicht, zu einem gewissen Zeitpunkt in einen Zinsswap einzutreten.

Im Gegensatz zu einer Swaption verpflichtet der*Forward Swaps* den Besitzer in den Swap-Kontrakt einzusteigen.

Beispiel Ein Unternehmen wird in sechs Monaten ein Darlehen mit variabler Verzinsung und einer Laufzeit von fünf Jahren abschließen und will die variable Zinszahlungen in feste Zinszahlungen umwandeln (→ Swap). Durch das Bezahlen einer bestimmten Prämie kann das Unternehmen aber in eine Swapition einsteigen, die ihm das Recht gibt, aber nicht verpflichtet, den sechsmonatigen EURIBOR-Satz zu erhalten und einen bestimmten festen Zinssatz für einen in sechs Monaten beginnenden Fünfjahresabschnitt zu zahlen. Unterschreitet in sechs Monaten der fixe Zinssatz bei einem regulären Fünfjahres-Swap den in der Swaption festgelegten fixen Zinssatz, so wird das Unternehmen die Swaption nicht ausüben und in einen regulären Swap einsteigen.

Auf diese Weise dienen Swaptions einem Unternehmen zum Absichern gegen das Risiko, dass der feste Zinssatz, den es zu einem zukünftigen Zeitpunkt auf einen Kredit zahlt, ein bestimmtes Niveau nicht überschreitet.

3.4.1 Bewertung europäischer Swaptions

Definition Die Swap Rate s_T ist jener konstanter Zinssatz, der in einem zur Zeit T ausgegebenen Swap für eine Laufzeit n mit m Auszahlungsterminen pro Jahr mn-mal gegen den EURIBOR-Satz getauscht werden kann.

Man betrachte eine Swaption, die uns das Recht gibt, einen konstanten Zins s_K zu bezahlen und EURIBOR auf einen Swap zu erhalten. Der Swap startet in T Jahren und wird n Jahre laufen. Der Nominalbetrag ist L und es gibt m Zahlungen aus dem Swap pro Jahr. Unter der gewöhnlichen Annahme sei die betreffende Swap Rate s_t bei Fälligkeit der Option log-normalverteilt mit Volatilität σ.

Vergleicht man die Zahlungsströme eines Swaps mit konstanten Zins s_T mit jenen eines Swaps mit konstanten Zins s_K, so sieht man, dass die Auszahlung der Swaption aus einer Serie von Zahlungsströmen der Höhe

$$\frac{L}{m}(s_T - s_K)^+$$

besteht.

Bezeichnen nun $T_1, T_2, ..., T_{mn}$ die Auszahlungstermine über die gesamte Laufzeit, so ist der Wert der Swaption die Summe der Zahlungsströme zu den einzelnen Auszahlungsterminen:

$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P[0, T_i](s_0 \Phi(d_1) - s_K \Phi(d_2)) \tag{3.13}$$

mit

$$d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln(\frac{s_0}{s_K}) \pm \frac{1}{2}\sigma^2 T)$$

s_0 ist die Forward Swap Rate, also den zum Zeitpunkt 0 erwarteten konstanten Zins eines zum Zeitpunkt T ausgegebenen Swaps.
$A = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{mn} P[0, T_i]$ nennt man Annuität. So vereinfacht sich die Darstellung des Werts der Swaption zu:

$$LA(s_0 \Phi(d_1) - s_K \Phi(d_2)) \tag{3.14}$$

bzw. für den Swap, bei dem EURIBOR gezahlt wird und man konstanten Zins erhält:

$$LA(s_K\Phi(-d_2) - s_0\Phi(-d_1)) \tag{3.15}$$

3.4.2 Theoretische Begründung

Unter der Annahme einer Forward-risikoneutralen Welt bezüglich der Annuität erhält man:

1. Der gegenwärtige Wert eines beliebigen Wertpapiers ist der gegenwärtige Wert der Annuität, multipliziert mit
$$E[\frac{\text{Preis des Wertpapiers zu } T}{\text{Wert der Annuität zu } T}]$$
So folgt der Wert einer Swaption:
$$LAE[(s_T - s_K)^+] \tag{3.16}$$
2. $E_A[s_t] = s_0$

Man erhält also die Formeln, indem man auf (3.16) Formel (3.3) anwendet und den obigen 2. Punkt verwendet - unter der Annahme, dass der konstante Zinssatz zur Zeit T log-normalverteilt ist.

Man kann also Zinssätze zur Diskontierung als konstant betrachten, wenn man die erwartete Swap Rate gleich der Forward-Swap-Rate setzt.

3.5 Fazit

Die Grundidee des Black-Modells, den Wert der zugrundeliegenden Variable bei Fälligkeit der Option logarithmisch normalverteilt anzunehmen, machte es zu einem sehr populären Verfahren zur Bewertung von Zinsoptionen **europäischen** Typs.

Das Black-Modell findet deshalb bei Zinscaps/Zinsfloors, europäische Anleiheoptionen sowie europäische Swaptions eine breite Anwendung.
Der Nachteil der Annahme ist, dass zwar jedes dieser Modelle für sich konsistent ist, jedoch nicht untereinander. Dies bedeutet, dass es nicht möglich ist, alle betreffenden Variablen als log-normalverteilt vorauszusetzen, ohne die Abgeschlossenheit des Modells zu verlieren.

Da die Veränderlichkeit von Zinssätzen nicht berücksichtig wird, kann man das Modell nicht für **amerikanische** Optionen verwenden, da diese bis zu einem gewissen festgelegten Zeitpunkt jeder Zeit ausgeübt werden können.

4 Short-Rate-Modelle

4.1 Hintergrund

Die bisherigen Methoden unter Verwendung der log-Normalverteilung finden zwar breite Anwendung bei der Bewertung von Caps, europäischen Anleiheoptionen und europäischen Swaptions, stoßen jedoch an ihre Grenzen, wenn die Veränderung von Zinssätzen im Zeitablauf auftauchen.
Die nächsten Kapitel befassen sich mit Verfahren, die diese Einschränkung überwinden. Hierzu gehört die Ableitung sogenannter *Zinsstrukturmodelle*, welche die Entwicklung aller Nullkupon-Zinssätze (*Spot Rates*) beschreiben.

Definition Der Zinssatz, der zum Zeitpunkt t für einen unendlich kurzen Zeitabschnitt gilt, nennt man <u>Short Rate</u> r.

Man betrachtet die Short Rate, oder auch *momentaner kurzfristiger Zinssatz* genannt, in einer risikoneutralen Welt, das heißt: In einem sehr kurzen Intervall $[t, t + \Delta t]$ kann im Mittel $r(t)\Delta t$ erwirtschaftet werden.

Der Wert eines Zinsderivats zur Zeit t, das zum Zeitpunkt T eine Auszahlung von f_T leistet, ist

$$E[e^{-\overline{r}(T-t)} f_T] \tag{4.1}$$

wobei $\overline{r}$ der durchschnittliche Wert von r über das Zeitintervall $[t, T]$ ist.

$P[t, T]$ definiert, wie gehabt, den Preis einer Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt t, die einen Betrag von 1 zur Zeit T auszahlt. Gemäß (4.1) folgt

$$P[t, T] = E[e^{-\overline{r}(T-t)}] = E[e^{-R(t,T)(T-t)}] \tag{4.2}$$

R(t,T) entspricht dem Zinssatz zum Zeitpunkt t für eine Periode $T - t$ bei stetiger Verzinsung. Somit folgt:

$$R(t, T) = -\frac{1}{T - t} \ln(E[e^{-\overline{r}(T-t)}]) \tag{4.3}$$

Mit dieser Gleichung kann man die Laufzeitstruktur der Zinssätze zu jedem beliebigen Zeitpunkt aus dem Wert von r zum jetzigen Zeitpunkt und dem risikoneutralen Prozess für r ableiten.
Gesucht werden also Modelle, die den Prozess von r darstellen und beschreiben.

4.2 Gleichgewichtsmodelle

Gleichgewichtsmodelle beginnen normalerweise mit Annahmen über ökonomische Variablen und leiten einen Prozess für die Short Rate r her. Sie untersuchen dann die Folgen aus dem Prozess von r für die Anleihe- und Optionspreise.

Bei einem Ein-Faktor-Gleichgewichtsmodell hängt der Prozess für r nur von einer Unsicherheitsquelle ab. Grundsätzlich wird der risikoneutrale Prozess von r durch einen It$\hat{o}$-Prozess der Form

$$dr = m(r)dt + s(r)dz \tag{4.4}$$

beschrieben. $m(r)$ bezeichnet dabei den momentanen Drift, einen Richtwert für den Zuwachs von r, und $s(r)$ die momentane Standardabweichung. Es ist zu bemerken, dass m und s zwar von r abhängen, jedoch zeitunabhängig sind.
Ein Ein-Faktor-Modell ist nicht so einschränken wie man meinen sollte, da sich Zinssätze in einem beliebig kurzen Intervall zwar nur in dieselbe Richtung ändern können, der Betrag der Änderung jedoch offen ist.

4.2.1 Rendleman-Bartter-Modell

Der Prozess von r ist im Rendleman-Bartter-Modell durch

$$\mathrm{d}r = \mu r \ \mathrm{d}t + \sigma r \ \mathrm{d}z,$$

gegeben, wobei μ und σ konstant sind.
Der Prozess folgt also einer geometrischen Brown'schen Bewegung und kann, ähnlich einem Aktienkurs, durch einen Binomialbaum dargestellt werden. Dieses Verhalten hat jedoch den Nachteil, dass es einen wichtigen Unterschied zwischen Zinssätzen und Aktienkurse gibt:

Zinssätze tendieren, im Gegensatz zu Aktienkursen, im Laufe der Zeit zu einem langfristigen Durchschnittsniveau, auch als *Mean Reversion* oder Mittelwerttendenz bezeichnet. Wenn r hoch ist, führt die Mean Reversion zu einer negative Driftrate; ist r niedrig, ergibt sich eine positive Driftrate.
Die Existenz von Mean Reversion ist ökomomisch belegt: Ist der Zins zu hoch, so wird die Wirtschaft gebremst und die Nachfrage nach Krediten und Zahlunsmittelen sinkt - der Zins fällt. Ist hingegen der Zins niedrig, so werden Kredite "billiger" und Unternehmen investieren mehr, sodass die Wirtschaft wieder angekurbelt wird und der Zins durch die Nachfrage steigt.

Deswegen ist man an einem Modell mit Mean Reversion interessiert - im Rendleman-Bartter-Modell stellt dies ein großes Manko dar.

4.2.2 Vasicek-Modell

Im Vasicek-Modell lautet der Prozess für r

$$\mathrm{d}r = a(b-r)\ \mathrm{d}t + \sigma\ \mathrm{d}z,$$

wobei a,b und σ konstant sind.

Der Vorteil dieses Modells gegenüber dem vorigen liegt darin, dass es Mean Reversion berücksichtigt. So wird die Short Rate r von a auf ein Niveau b gezogen und dabei von einem normalverteilten stochastischen Term $\sigma\ \mathrm{d}z$ überlagert.

Als Nachteil stellt sich heraus, dass die Short Rate bei niedrigen Niveau negativ werden kann.

Sobald a, b und σ bekannt sind, ist $R(t)$ nur noch von $r(t)$ linear abhängig und die Zinsstrukturkurve vollständig beschreibbar. Diese ist entweder nach oben/unten geneigt oder ist mit einem Hügel versehen.

4.2.3 Das Modell von Cox, Ingersoll und Ross

Da im Vasicek-Modell der kurzfristige Zinssatz r negativ werden kann, haben Cox, Ingersoll und Ross ein an das Vasicek-Modell angepasste alternatives Modell vorgeschlagen, bei dem Zinssätze stets nichtnegativ sind. Der Prozess von r ist

$$\mathrm{d}r = a(b-r)\ \mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r}\ \mathrm{d}z$$

Die Standardabweichung der Veränderung der Short Rate ist hier proportional zu $\sqrt{r}$.
Die Zinsstrukturkurve kann dabei steigend, sinkend oder gekrümmt sein.
$R(t)$ ist ebenfalls linear abhängig vom Wert von $r(t)$, welcher das Niveau der Zinsstrukturkurve zum Zeitpunkt t, nicht allerdings die grundsätzliche Form, bestimmt.

4.3 No-Arbitrage-Modelle

Der Nachteil der Gleichgewichtsmodelle besteht darin, dass sie nicht unbedingt automatisch an die anfängliche Zinsstruktur angepasst sind. Durch eine geschickte Wahl der Parameter ist dies zwar annähernd zu erreichen, jedoch handelt es sich dabei für gewöhnlich um keine exakte Anpassung. Bereits kleine Fehler wirken sich sehr stark auf die späteren Bewertungen von Finanzinstrumenten aus - unbefriedigend für Händler. Durch die nicht korrekte Bewertung haben diese nur ein sehr geringes Vertrauen in die Preise.

No-Arbitrage-Modelle sind deshalb so konstruiert, dass sie exakt mit der aktuellen Zinsstruktur übereinstimmen. Im Gegensatz zu Gleichgewichtsmodellen ist hier die aktuelle

Zinsstruktur ein Modell-Input, nicht Output.

Weiters ist die momentane Driftrate $m(r)$ bei No-Arbitrage-Modellen sehr wohl von der Zeit abhängig, da die anfängliche Form der Kurve den weiteren Pfad des kurzfristigen Zinssatzes bestimmt. Steigt die Zinsstrukturkurve für Laufzeiten t_1 und t_2 deutlich, hat r zwischen den Zeitpunkten einen positiven Drift, sinkt die Zinsstrukturkurve, einen negativen.

Indem man die Drift des kurzfristigen Zinssatzes zeitabhängig modelliert, kann man einige Gleichgewichtsmodelle in No-Arbitrage-Modelle umwandeln.

4.3.1 Ho-Lee-Modell

Das Modell war 1986 das erste No-Arbitrage-Modell für die Zinsstruktur. Es wird in Form eines Binomialbaums von Anleihepreisen mit zwei Parametern ausgeführt:

1. Die kurzfristige Standardabweichung σ (konstant)
2. Der Marktpreis des Risikos $\theta(t)$

Das Modell konvergiert in stetiger Zeit gegen

$$\mathrm{d}r = \theta(t)\ \mathrm{d}t + \sigma\ \mathrm{d}z.$$

$\theta(t)$ ist hier eine Funktion der Zeit, die so gewählt wird, dass das Modell an die anfängliche Zinsstruktur angepasst ist. Zusätzlich gibt $\theta(t)$ die mittlere Richtung an, in die sich r zum Zeitpunkt t bewegt (unabhängig von der Höhe von r).

Diese mittlere Richtung kann analytisch berechnet werden:

$$\theta(t) = F_t(0,t) + \sigma^2 t \tag{4.5}$$

wobei $F_t(0,t)$ die partielle Ableitung der momentanen Forward Rate mit Fälligkeitstermin t zum Zeitpunkt 0 ist. Da näherungsweise $\theta(t) = F_t(0,t)$, folgt die durchschnittliche Richtung, in die sich die Short Rate bewegt, näherungsweise der momentanen Forward-Kurve, überlagert von normalverteilten Größen.

4.3.2 Ein-Faktor-Modell von Hull-White

Hull und White versuchten sich an einer Erweiterung des Vasicek-Modells mit der eine exakte Anpassung an die anfängliche Zinsstruktur möglich ist:

$$\mathrm{d}r = [\theta(t) - ra]\ \mathrm{d}t + \sigma\ \mathrm{d}z = a[\tfrac{\theta(t)}{a} - r]\ \mathrm{d}t + \sigma\ \mathrm{d}z,$$

wobei a und σ konstant sind.

Man kann das Hull-White-Modell auch als Ho-Lee-Modell mit Mean Reversion oder als Vasicek-Modell mit zeitabhängigem Reversionsniveau charakterisieren. Zum Zeitpunkt t entwickelt sich die Short Rate Richtung $\frac{\theta(t)}{a}$ mit der Rate a. Das Hull-White-Modell für $a = 0$ entspricht dem Ho-Lee-Modell.

Auch dieses No-Arbitrage-Modell ist analytisch gut handhabbar:

$$\theta(t) = F_t(0,t) + aF(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \tag{4.6}$$

Der letzte Term ist sehr klein und wenn man ihn vernachlässigt, bekommt man $F_t(0,t) + a[F(0,t) - r]$ als Driftrate des Prozesses für r zum Zeitpunkt t. Auch hier folgt also r im Mittel der Steigung der anfänglichen Forward Rate-Kurve, jedoch zusätzlich mit Mean Reversion. Wenn also r von der Kurve abweicht, pendelt die Short Rate sich mit der Rate a wieder ein.

Ein Nachteil dieses Modells ist - wie beim Vasicek-Modell - die Möglichkeit einer negativen Short Rate.

4.3.3 Black-Karasinski-Modell

Bei dem von Black und Karasinski entworfenen Modell

$$\mathrm{d}\ln r = [\theta(t) - a(t)\ln r]\ \mathrm{d}t + \sigma(t)\ \mathrm{d}z$$

ist es nicht möglich, dass die Short Rate negativ wird.

Jedoch ist bei diesem Modell der zukünftige Wert der Short Rate r nicht normalverteilt wie bei Ho-Lee und Hull-White, sondern logarithmisch normalverteilt. Deshalb erweist sich das Modell als analytisch schlecht handhabbar.

4.3.4 Zwei-Faktor-Modell von Hull-White

Der Prozess von r folgt

$$\mathrm{d}f(r) = [\theta(t) + u - af(r)]\ \mathrm{d}t + \sigma_1\ \mathrm{d}z_1$$

Die Zufallsvariable u ist eine Komponente des Revisionsniveaus von r und kehrt mit einer Rate b auf den Wert 0 zurück. Sie folgt dem Prozess:

$$\mathrm{d}u = -bu\ \mathrm{d}t + \sigma_2\ \mathrm{d}z_2.$$

Dabei sind a, b, σ_1 und σ_2 konstant und $\mathrm{d}z_1$, $\mathrm{d}z_2$ Wiener Prozesse mit der momentanen Korrelation ρ. $\theta(t)$ wird wieder so gewählt, dass das Modell mit der anfänglichen Zinsstruktur konsistent ist.

Das Zwei-Faktor-Modell von Hull-White erlaubt entgegen Ein-Faktor-Modellen umfangreichere Zinsstrukturbewegungen und Volatilitätsstrukturen für r.

4.4 Fazit

Gleichgewichtsmodelle sind in der Finanzwelt klassische Modelle zur Beschreibung der Zinsstruktur und dienen zum Verständnis möglicher Beziehungen zwischen den Variablen der Ökonomie. Als Nachteil stellt sich jedoch heraus, dass die anfängliche Zinsstruktur ein Modelloutput anstatt eines Modellinputs ist und so zu einer ungenauen Bewertung führen kann. Es ist nämlich zur Bewertung von Zinsderivaten wichtig, dass das verwendete Modell mit der anfänglichen Zinsstruktur konsistent ist. Deshalb wurden sogenannte No-Arbitrage-Modelle entwickelt, die die anfängliche Zinsstruktur als gegeben nehmen und festlegen, wie sie sich dann weiter entwickeln kann.

Es wurden hier einige robuste No-Arbitrage-Modelle der Short Rate vorgestellt. Als einfachstes Modell stellt sich das Ho-Lee-Modell heraus, da es analytisch leicht lösbar ist. Jedoch hat es den Nachteil, dass impliziert wird, dass alle Zinssätze zu allen Zeitpunkten gleich flexibel sind (Stichwort Mean Reversion). Das Hull-White-Modell berücksichtigt Mean Reversion und ermöglicht so eine umfangreichere Beschreibung der Umgebung. Bei lognormalverteilten Einfaktor-Modellen steht der Vorteil der stets nicht negativen Zinssätzen dem Nachteil der fehlenden analytischen Lösbarkeit gegenüber.

5 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Seminararbeihaben wurde versucht, Zinsderivate zu verstehen, Wege zur Bewertung zu finden und zukünftige Zinsstrukturen zu beschreiben. Durch die komplizierte Zusammensetzung eines Zinssatzes und der Tatsache, dass dieser sowohl Gegenstand der Finanzkontrakte ist, als auch zum Diskontieren verwendet wird, wurden eine Reihe von Methoden und Modellen mit dem Ziel entwickelt, die bestmöglichen Lösung und Bewertung zu liefern. Dabei muss man oft einen Kompromiss zwischen der exakten Anpassung an das Produkt und der tatsächlichen Anwendbarkeit eingehen, um eine geeignete Methode zur Bewertung von Zinsderivaten zu erhalten.

Das Modell von Black beziehungsweise Black-Scholes stellt dabei immer noch einen beliebten und erfolgreichen Rahmen zur Handhabung von europäischen Optionen, Zinscaps/Zinsfloors und Swaptions. Um auch die amerikanischen Gegenstücke zu bewerten ist eine genauere Beschreibung der kurzfristigen Zinsstrukturkurve von Nöten. Dabei haben sich die No-Arbitrage-Modelle mit ihrer Vielzahl an Variationen als am robustesten herausgestellt.

Die Nachfrage an Derivaten wird auch nach Überwindung der aktuellen Finanzkrise wieder weiter steigen und vor allem als Mittel der Risikominimierung verwendet werden. Das bedeutet, dass immer neuere Methoden und Modelle entwickelt werden, die sich mit der Problematik befassen. Ausgangspunkt werden aber wahrscheinlich immer noch die hier vorgestellten Modelle sein - ein Zeichen für die herausragenden Leistungen von Black, Scholes und Co. in den letzten Jahrzehnten.

Literatur

[JH] John C. Hull (2006): Optionen, Futures und andere Derivate *Pearson Studium*

[DL] David G. Luenberger (1998): Investment science *Oxford Univ. Press*

[WI] Wikipedia, die freie Enzyklopädie: Portal Mathematik