

Semiar aus Finanz- und Versicherungsmathematik

# **Riemann-Stieltjes-Integral**

Harald VYBIRAL

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Riemann-Integral</b>	<b>2</b>
3.1	Riemann-Integral . . . . .	3
3.2	Oberes und Unteres Integral . . . . .	3
3.3	Kriterien für Integrierbarkeit . . . . .	4
3.4	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	5
3.5	Integrationsregeln . . . . .	6
3.6	Mittelwertsätze der Integralrechnung . . . . .	7
3.7	Integration von Funktionenfolgen und -reihen . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Riemann-Stieltjes Integral</b>	<b>8</b>
4.1	Darboux-Stieltjes- und Riemann-Stieltjes-Integral . . . . .	8
4.2	Funktionen von beschränkter Variation . . . . .	9
4.3	Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals . . . . .	10
4.4	Mittelwertsätze für Riemann-Stieltjes-Integrale . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Anwendungen</b>	<b>16</b>
5.1	Kurvenintegrale . . . . .	16
5.2	Wahrscheinlichkeitstheorie . . . . .	17
5.3	Darstellungssatz von Riesz . . . . .	18
5.4	Integration nach einer Brownschen Bewegung . . . . .	18

# 1 Vorwort

Diese Seminararbeit basiert hauptsächlich auf den Büchern „Advanced Calculus“ von LEONARD F. RICHARDSON aus dem Jahre 2008 und „Analysis 2“ von WOLFGANG WALTER aus dem Jahre 1995.

# 2 Einleitung

Im Jahre 1894 veröffentlichte der holländische Mathematiker THOMAS-JEAN STIELTJES (1856 - 1894, ab 1877 an der Sternwarte in Leiden, ab 1886 als Professor der Mathematik in Toulouse tätig) eine originelle Arbeit über Kettenbrüche, in welcher er ein neues, später nach ihm benanntes Integral  $\int_a^b f dg$  einführte. Er nimmt an, dass  $f$  stetig und  $g$  monoton wachsend ist und bildet, wenn  $Z = (t_0, \dots, t_p)$  eine Zerlegung des Intervalls  $I = [a, b]$  ist, die Summen

$$\sigma(Z, \tau) = \sum_{j=1}^p f(\tau_j)[(g(t_j) - g(t_{j-1}))] \quad \text{mit } t_{j-1} \leq \tau_j \leq t_j.$$

Sie unterscheiden sich von Riemannschen Zwischensummen lediglich dadurch, dass die „Größe“ des Intervalls  $I_j = [t_{j-1}, t_j]$  nicht durch  $t_j - t_{j-1}$ , sondern durch die entsprechende  $g$ -Differenz  $g(t_j) - g(t_{j-1})$  gemessen wird.

Das Stieltjes-Integral fand zunächst wenig Beachtung. Das ändert sich, als im Jahre 1909 der ungarische Mathematiker FRIEDRICH RIESZ, einer der Begründer der Funktionalanalysis, ein wichtiges Problem dieser damals noch jungen Wissenschaft löste und den nach ihm benannten Darstellungssatz formulierte.

# 3 Riemann-Integral

Das Riemann-Integral,  $\int_a^b f(x)dx$  dient zur Berechnung von Flächeninhalten in der Ebene. Das Integral soll folgende Eigenschaften erfüllen :

Sei  $f$  eine positive Funktion, die auf dem Intervall  $[a, b]$  definiert ist, dann ist  $\int_a^b f(x)dx$  der Inhalt der Fläche, die von der  $x$ -Achse und dem Graphen von  $f$  begrenzt wird. Ist  $f$  nicht strikt positiv, so hat die Fläche unter der  $x$ -Achse ein negatives Vorzeichen.

### 3.1 Riemann-Integral

**Definition 3.1:** Sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall und  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  und  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ , für  $j = 1, \dots, n$ , so nennt man  $Z = I_1, I_2, \dots, I_n$  eine **Zerlegung** von  $[a, b]$ . Die **Feinheit** von  $Z$  ist definiert durch:

$$|Z| = \max_{i=1,2,\dots,n} \{x_i - x_{i-1}\}$$

Aus jedem Teilintervall  $I_j$  wird nun ein beliebes  $b_j \in I_j$  gewählt. Man nennt  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  eine zu  $Z$  gehörige **Belegung**.

**Definition 3.2:** Sei  $Z$  eine Zerlegung und  $B$  eine zugehörige Belegung, so nennt man:

$$S(f, Z, B) = \sum_{j=1}^n f(b_j)(x_j - x_{j-1})$$

**Riemannsumme.** Jeder Summand ist die Fläche des Rechtecks mit der Grundlinie  $[x_{j-1}, x_j]$  und Höhe  $f(b_j)$ .

**Definition 3.3 (Riemann-Integral):** Existiert der Grenzwert  $\lim_{|Z| \rightarrow 0} S(f, Z, B)$  und ist der Wert für jede Belegung gleich, so nennt man ihn das **Riemann-Integral** von  $f$  über  $[a, b]$ .  $f$  heißt dann Riemann integrierbar.

### 3.2 Oberes und Unteres Integral

Sei  $f$  eine auf  $[a, b]$  beschränkte Funktion und  $Z$  eine Zerlegung. Definiere

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

und

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Man erhält nun die Obersumme  $\bar{S}(f, Z)$  und die Untersumme  $\underline{S}(f, Z)$  mit:

$$\bar{S}(f, Z) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{und} \quad \underline{S}(f, Z) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Es gilt  $\underline{S}(f, Z) \leq \bar{S}(f, Z), \forall Z$ . Sei  $Z'$  mit  $|Z'| \leq |Z|$ , dann gilt sogar

$$\underline{S}(f, Z) \leq \underline{S}(f, Z') \leq \overline{S}(f, Z') \leq \overline{S}(f, Z).$$

So kommen wir zur Definition des oberen und unteren Integrals:

$$\overline{\int_a^b} = \inf_Z (\overline{S}(f, Z))$$

und

$$\underline{\int_a^b} = \sup_Z (\underline{S}(f, Z)).$$

**Satz 3.4 (Darboux' sches Kriterium für Integrierbarkeit):** Sei  $f$  beschränkt auf  $[a, b]$ .  $f$  ist genau dann Riemann integrierbar, wenn

$$\lim_{|Z| \rightarrow 0} \underline{S}(f, Z) = \lim_{|Z| \rightarrow 0} \overline{S}(f, Z).$$

Es gilt dann  $\underline{\int_a^b} f dx = \int_a^b f dx = \overline{\int_a^b} f dx$ .

### 3.3 Kriterien für Integrierbarkeit

**Satz 3.5:** Jede auf einem kompakten Intervall  $[a, b]$  stetige Funktion ist über  $[a, b]$  Riemann-integrierbar.

**Satz 3.6:** Jede Funktion, die auf  $[a, b]$  mit Ausnahme von endlich vielen Sprungstellen stetig ist, ist über  $[a, b]$  Riemann-integrierbar.

**Definition 3.7:** Man nennt eine Teilmenge  $N$  von  $\mathbb{R}$  eine Lebesgue-Nullmenge, wenn sie für jedes  $\epsilon > 0$  durch höchstens abzählbar viele Intervalle mit Gesamtlänge  $\epsilon$  überdeckt werden kann.

**Satz 3.8:** Eine auf  $[a, b]$  definierte Funktion  $f$  ist genau dann über  $[a, b]$  Riemann-integrierbar, wenn

1.  $f$  auf  $[a, b]$  beschränkt ist und
2. die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $f$  in  $[a, b]$  eine Lebesgue- Nullmenge ist, also  $f$  auf  $[a, b]$  fast überall stetig ist.

**Satz 3.9:** Jede auf  $[a, b]$  beschränkte Funktion mit höchstens abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen ist über  $[a, b]$  Riemann-integrierbar. Es ist also jede auf  $[a, b]$  monotone Funktion über  $[a, b]$  Riemann-integrierbar.

**Satz 3.10:** Sind  $f$  und  $g$  auf  $[a, b]$  fast überall gleich und Riemann-integrierbar so gilt:

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Speziell für nichtnegative, über  $[a, b]$  Riemann-integrierbare Funktionen  $f$  gilt sogar:

$$\int_a^b f = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \text{fast überall auf } [a, b].$$

### 3.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

**Definition 3.11 (Unbestimmtes Integral):** Für eine reelle Funktion  $f$  und jedes  $c$  aus dem Definitionsbereich nennt man die Abbildung

$$x \rightarrow \int_c^x f(t) dt$$

ein unbestimmtes Integral.

**Definition 3.12:** Man nennt  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  auf  $M \subseteq D(f) \cap D(F)$ , wenn für alle  $x \in M$  gilt:  $F'(x) = f(x)$ . Eine Stammfunktion ist bis auf eine zu addierende Konstante eindeutig bestimmt.

**Satz 3.13 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung):** Hat  $f$  auf einem Intervall  $I$  eine Stammfunktion  $F$  und existieren dort die unbestimmten Integrale von  $f$ , so gilt für jedes von ihnen:

$$\int_c^x f(t) dt = F(x) - F(c)$$

*Beweis:* Für jedes  $\epsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$  so, dass aus  $\|Z\| < \delta$  folgt

$$\left| S(f, Z, B) - \int_c^x f(t) dt \right| < \epsilon$$

Sei nun  $Z$  irgendeine Zerlegung mit  $|Z| < \delta$ . Laut dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert in jedem Intervall  $[x_{i-1}, x_i]$  ein  $b_i$  mit  $F'(b_i)(x_i - x_{i-1}) = F(x_i) - F(x_{i-1})$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
S(f, Z, B) &= \sum_{i=1}^n f(b_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n F'(b_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}) \\
&= F(x) - F(c).
\end{aligned}$$

Somit gilt  $|F(x) - F(c) - \int_c^x f(t)dt| < \epsilon$  für alle  $\epsilon > 0$  und somit  $F(x) - F(c) = \int_c^x f(t)dt$  für  $\epsilon \rightarrow 0$

□

### 3.5 Integrationsregeln

**Elementare Rechenregeln:**

1.  $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$
2.  $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3.  $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$
4.  $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

**Partielle Integration:** Sind  $f$  und  $g$  auf  $[a, b]$  differenzierbar so gilt:

$$\int_a^b (f'g)(x)dx = (fg)(x)|_a^b - \int_a^b (fg')(x)dx$$

**Substitutionsregel:** Ist  $\varphi$  eine differenzierbare Funktion, die  $[a, b]$  auf  $[\alpha, \beta]$  abbildet und gilt entweder, dass  $f$  auf  $[\alpha, \beta]$  eine Stammfunktion hat, oder, dass  $\varphi$  auf  $[a, b]$  monoton ist, also  $\varphi' \geq 0$  (bzw.  $\leq 0$ ), so folgt:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

falls beide Integrale existieren.

### 3.6 Mittelwertsätze der Integralrechnung

**Satz 3.14 (1. Mittelwertsatz):** Sind  $f$  und  $g$  über  $[a, b]$  Riemann-integrierbar und ist  $g \geq 0$  auf  $[a, b]$ , so gibt es eine Zahl  $\alpha$  mit  $\inf_{[a,b]} f \leq \alpha \leq \sup_{[a,b]} f$  für die gilt:

$$\int_a^b (fg)(x)dx = \alpha \int_a^b g(x)dx.$$

Ist  $f$  auf  $[a, b]$  stetig, so gilt  $\alpha = f(c)$  für ein  $c \in [a, b]$ .

**Satz 3.15 (2. Mittelwertsatz):** Ist  $f$  über  $[a, b]$  Riemann-integrierbar und  $g$  auf  $[a, b]$  monoton, so existiert ein  $c \in [a, b]$  mit:

$$\int_a^b (fg)(x)dx = g(a) \int_a^c f(x)dx + g(b) \int_c^b f(x)dx.$$

### 3.7 Integration von Funktionenfolgen und -reihen

1. Ist  $\{f_n\}$  eine auf  $[a, b]$  gleichmäßige konvergente Folge Riemann-integrierbarer Funktionen, so ist auch die Grenzfunktion dieser Folge über  $[a, b]$  Riemann-integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

2. Ist  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  eine auf  $[a, b]$  gleichmäßig konvergente Reihe integrierbarer Funktionen, so ist auch die Grenzfunktion dieser Reihe über  $[a, b]$  Riemann-integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

Bei gleichmäßiger Konvergenz darf man Limes und Integral vertauschen.

## 4 Riemann-Stieltjes Integral

Bei der Konstruktion des Riemann-Integrals durch Ober- bzw. Untersummen und Riemannsummen wurden die Auswertungspunkte bezüglich einer Zerlegung jeweils mit der Länge des Intervalls gewichtet. Beim Riemann-Stieltjes Integral werden sie durch eine Funktion  $g$  gewichtet.

Stieltjes verbindet mit seinem neuen Integralbegriff auch eine physikalische Vorstellung. Man denke sich das Intervall  $[0, 1]$  mit punktförmig oder kontinuierlich verteilter Masse belegt. Bezeichnet  $g(t)$  die im Intervall  $[0, t]$  enthaltene Masse, so entspricht der  $g$ -Differenz  $g(t) - g(t_{i-1})$  die Masse im Teilintervall  $(t_{i-1}, t_i]$ . Es lassen sich dann z.B. die Gesamtmasse oder der Schwerpunkt in einheitlicher Form angeben.

### 4.1 Darboux-Stieltjes- und Riemann-Stieltjes-Integral

Analog zu den entsprechenden Begriffen für das Riemann-Integral definiert man für beschränkte Funktionen  $f$  und  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und alle Zerlegungen  $Z$  von  $[a, b]$  und alle zugehörigen Belegungen  $B$  die Stieltjes-Untersumme bzw. -Obersumme von  $f$  bezüglich  $g$  zur Zerlegung  $Z$  durch :

$$\underline{\sigma}(f, Z, g) = \sum_{j=1}^n \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \cdot (g(x_j) - g(x_{j-1}))$$

und

$$\bar{\sigma}(f, Z, g) = \sum_{j=1}^n \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f \cdot (g(x_j) - g(x_{j-1}))$$

und die zur Zerlegung  $Z$  und Belegung  $B$  gehörige Riemann-Stieltjes-Summe von  $f$  bezüglich  $g$  durch:

$$\sigma(f, Z, B, g) = \sum_{j=1}^n f(b_j) \cdot (g(x_j) - g(x_{j-1}))$$

Für nicht monoton wachsendes  $g$  ist im allgemeinen nicht zu erwarten, dass die Riemann-Stieltjes-Summen zwischen den entsprechenden Unter- bzw. Obersummen liegen. Ebenso wenig wird das Supremum der Untersummen bzw. das Infimum der Obersummen gleich deren Limes  $|Z| \rightarrow 0$  sein. Man gelangt daher zu 2 verschiedenen Integralbegriffen:

1. ist  $\sup_Z \underline{\sigma}(f, Z, g) = \inf_Z \bar{\sigma}(f, Z, g)$ , so nennt man diesen Wert das Darboux-Stieltjes-Integral von  $f$  bezüglich  $g$  über  $[a, b]$ .

2. Konvergieren die Riemann-Stieltjes-Summen für  $|Z| \rightarrow 0$  unabhängig von den gewählten Belegungen gegen ein und denselben Grenzwert, so nennt man diesen das Riemann-Stieltjes-Integral von  $f$  bezüglich  $g$  über  $[a, b]$ :

$$\lim_{|Z| \rightarrow 0} \sigma(f, Z, B, g) = \int_a^b f(x) dg(x) \text{ oder } \int_a^b f dg.$$

**Satz 4.1:** Ist  $g$  auf  $[a, b]$  monoton wachsend, so gilt :

1.  $\underline{\sigma}(f, Z, g) \leq \sigma(f, Z, B, g) \leq \bar{\sigma}(f, Z, g)$  für alle Zerlegungen  $Z$  von  $[a, b]$  und alle zugehörigen Belegungen  $B$ .
2.  $\int_a^b f dg$  existiert genau dann, wenn gilt:

$$\lim_{|Z| \rightarrow 0} (\bar{\sigma}(f, Z, g) - \underline{\sigma}(f, Z, g)) = 0.$$

3. aus der Existenz von  $\int_a^b f dg$  folgt die des entsprechenden Darboux-Stieltjes-Integrals und dessen Gleichheit mit  $\int_a^b f dg$ .

## 4.2 Funktionen von beschränkter Variation

Die Totalvariation einer Funktion  $f$ , die auf  $[a, b]$  definiert ist, ist ein Maß dafür wie sehr die Werte von  $f$  oszillieren.

**Definition 4.2:** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Sei  $Z$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  mit Teilungspunkten  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , so definieren wir:

$$P(f) := \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

2. Wir definieren die Totalvariation von  $f$  auf  $[a, b]$  durch:

$$V_a^b(f) := \sup_Z P(f),$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen von  $[a, b]$  zu bilden ist.

3.  $f$  ist von beschränkter Variation auf  $[a, b]$ , also  $f \in BV[a, b]$ , genau dann, wenn  $V_a^b(f) < \infty$

**Satz 4.3:** Sei  $f$  monoton auf  $[a, b]$ , dann gilt  $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$ , also  $f \in BV[a, b]$

*Beweis:* Wir zeigen nur den Fall, in dem  $f$  monoton steigend ist. Dann gilt für jede Zerlegung  $Z$ :

$$P(f) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n f(x_k) - f(x_{k-1}) = f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)|$$

□

**Satz 4.4:** Sei  $f$  stetig auf  $[a, b]$  und  $f'$  zumindest beschränkt auf  $(a, b)$ , dann gilt  $f \in BV[a, b]$  und  $V_a^b \leq \|f'\|_{\text{sup}}(b - a)$ .

*Beweis:* Für den Beweis verwenden wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Für jedes  $Z$  gilt:

$$\begin{aligned} |P(f)| &= \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |f'(\bar{x}_k)|(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \|f'\|_{\text{sup}} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \|f'\|_{\text{sup}}(b - a). \end{aligned}$$

Der Mittelwertsatz garantiert die Existenz eines passenden  $\bar{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ .

□

**Lemma 4.5:** Es gilt  $f \in BV[a, b]$  genau dann, wenn zwei monoton steigende Funktionen  $g$  und  $h$  so existieren, dass  $f = g - h$  auf  $[a, b]$ .

### 4.3 Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals

Die auftretenden Funktionen seien auf dem Intervall  $I = [a, b]$  erklärt.

1. Linearität bezüglich  $f$  und  $g$ . Wenn die Integrale  $\int_a^b f_i dg$  und  $\int_a^b f dg_i$  existieren ( $i = 1, 2$ ), dann existieren auch die folgenden Integrale, und es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) dg &= \lambda_1 \int_a^b f_1 dg + \lambda_2 \int_a^b f_2 dg, \\ \int_a^b f d(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) &= \lambda_1 \int_a^b f dg_1 + \lambda_2 \int_a^b f dg_2. \end{aligned}$$

2. Für  $a < c < b$  gilt

$$\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg.$$

wenn alle drei Integrale existieren.

**Satz 4.6:** Ist  $f \in C^0(I)$  und  $g \in BV(I)$ , so existiert das Integral  $\int_a^b f dg$ , und es besteht die Abschätzung

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \|f\|_\infty V_a^b(g).$$

*Beweis:* Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f$  gibt es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  derart, dass aus  $|s - t| < \delta$  folgt  $|f(s) - f(t)| < \epsilon$ . Wir wählen eine Zerlegung  $Z_\epsilon = (r_0, \dots, r_q)$  mit  $|Z_\epsilon| < \delta$  und eine zugehörige RS-Summe  $\sigma(f, Z_\epsilon, \rho, g)$ , etwa mit  $\rho = (r_0, \dots, r_q)$ . Nun sei  $Z = (t_0, \dots, t_p)$  eine Verfeinerung von  $Z_\epsilon$ , und es sei etwa  $t_m = r_1$ . Der erste Summand von  $\sigma(f, Z_\epsilon, \rho, g)$  lässt sich in der Form

$$f(r_1)[g(r_1) - g(r_0)] = \sum_{i=1}^m f(r_1)[g(t_i) - g(t_{i-1})]$$

schreiben. Da die ersten  $m$  Zwischenzeilen  $\tau_i$  von  $\sigma(f, Z, \tau, g)$  in  $[a, r_1]$  liegen und da  $r_1 - a < \delta$  ist, gilt  $|f(\tau_i) - f(r_1)| < \epsilon$ . Deshalb erhält man für die Differenz zwischen dem ersten Glied von  $\sigma(f, Z_\epsilon, \rho, g)$  und den ersten Gliedern von  $\sigma(f, Z, \tau, g)$  die Abschätzung

$$\left| \sum_{i=1}^m [f(r_1) - f(\tau_i)][g(t_i) - g(t_{i-1})] \right| \leq \epsilon V_a^{r_1}(g).$$

Verfährt man mit den Teilintervallen  $[r_1, r_2], \dots, [r_{q-1}, r_q]$  entsprechend, so ergibt sich

$$|\sigma(f, Z, \tau, g) - \sigma(f, Z_\epsilon, \rho, g)| \leq \epsilon V_a^b(g).$$

Für beliebige Zerlegungen  $Z, Z' \supset Z_\epsilon$  ist dann

$$\begin{aligned} |\sigma(f, Z, \tau, g) - \sigma(f, Z', \tau', g)| &\leq |\sigma(f, Z, \tau, g) - \sigma(f, Z_\epsilon, \rho, g)| \\ &\quad + |\sigma(f, Z', \tau', g) - \sigma(f, Z_\epsilon, \rho, g)| \\ &\leq 2\epsilon V_a^b(g). \end{aligned}$$

Also ist  $(\sigma(f, Z, \tau, g))$  ein Cauchy-Netz, und  $\int_a^b f dg$  existiert. Eine einfache Abschätzung ergibt die behauptete Ungleichung:

$$|\sigma(f, Z, \tau, g)| \leq \|f\|_\infty \sum |g(t_i) - g(t_{i-1})| \leq \|f\|_\infty V_a^b(g).$$

□

**Satz 4.7:** Haben  $f$  und  $g$  an der selben Stelle  $c \in [a, b]$  eine Unstetigkeitsstelle, dann existiert das RS-Integral  $\int_a^b f dg$  nicht.

An dieser Stelle sei ein Beispiel angeführt:

**Beispiel:** Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{wenn } x \in (1, 2] \end{cases}$$

und sei

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{wenn } x \in [1, 2] \end{cases}$$

Wir machen folgende Beobachtungen:

- $\int_0^1 f dg = f(1) \cdot 1 = 0$ , da  $f$  auf  $[0, 1]$  stetig und  $g$  eine Treppenfunktion ist
- $\int_1^2 dg = 0$  da  $g'(x) = 0$  auf  $[1, 2]$  und mit Satz 4.3 gilt

$$\int_1^2 f dg = \int_1^2 f(x) \cdot g'(x) dx = 0.$$

- $\int_0^2 f dg$  existiert nicht. Wir können stets eine Zerlegung  $Z$  wählen mit  $x_{k-1} < 1 < x_k$ , egal wie klein  $|Z|$  gewählt wird. Somit gilt sicher auch  $g(x_k) - g(x_{k-1}) = 1$  und  $f(b_k)$  kann entweder 0 oder 1 sein, je nachdem wie  $b_k$  gewählt wird.  $\sigma(f, Z, B, g)$  ist dementsprechend 0 oder 1.  $\sigma(f, Z, B, g)$  konvergiert also nicht für  $|Z| \rightarrow 0$ . Die Eigenschaften des RS-Integral unterscheidet sich also von denen des Riemann-Integrals.

Bisher haben wir noch kein Mittel, um RS-Integrale wirklich zu berechnen. Die direkte Berechnung über die Definition über RS-Summen ist wie beim Riemann-Integral nur selten praktikabel. Die folgenden beide Sätze sind die wesentlichen Hilfsmittel zur Berechnung des RS-Integrals.

**Satz 4.8 (Partielle Integration)** : Mit  $\int_a^b f dg$  existiert auch  $\int_a^b g df$ , und es gilt

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = fg|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

*Beweis:* Grundlage des Beweises ist die Identität ( $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$ ;  $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$ )

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p g(\tau_i)[f(t_i) - f(t_{i-1})] \\ + \sum_{i=1}^p \{ & f(t_{i-1})[g(\tau_i) - g(t_{i-1})] + f(t_i)[g(t_i) - g(\tau_i)] \} \quad (*) \\ & = f(b)g(b) - f(a)g(a), \end{aligned}$$

welche man leicht bestätigt. Zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es eine Zerlegung  $Z_\epsilon$  derart, dass  $|\sigma(f, Z, \tau, g) - J| < \epsilon$  gilt für alle  $Z \supset Z_\epsilon$ ; dabei bezeichnet  $J$  den Wert des Integrals  $\int_a^b f dg$ .

Die erste Summe in (\*) ist gleich  $\sigma(g, Z, \tau, f)$ , die zweite Summe ist eine RS-Summe  $\sigma(f, Z^*, \tau^*, g)$ , wobei  $Z^*$  alle  $t_i$  und alle  $\tau_i$  als Teilungspunkte enthält und  $\tau_j^*$  jeweils der linke oder rechte Endpunkt des betrachteten Intervalls ist (ist  $\tau_i = t_{i-1}$  oder  $t_i$ , so tritt  $\tau_i$  nicht als neuer Teilungspunkt in  $Z^*$  auf, andererseits ist der betreffende Summand gleich 0).

Aus  $Z \supset Z_\epsilon$  folgt  $Z^* \supset Z_\epsilon$ , also  $|\sigma(f, Z^*, \tau^*, g) - J| < \epsilon$ , und aus (\*) ergibt sich  $|\sigma(g, Z, \tau, f) - fg|_a^b + J| < \epsilon$ . Das bedeutet aber, daß das Integral  $\int_a^b g df$  existiert und den angegebenen Wert  $fg|_a^b - J$  hat.

□

**Satz 4.9 (Transformation in ein Riemann-Integral):** Ist  $f$  Riemann-integrierbar und  $g \in C^1(I)$ , so existiert  $\int_a^b f dg$ , und es gilt

$$\int_a^b f dg = \int_a^b fg' dt.$$

Jedes Integral  $\int_a^b f h dt$  lässt sich also als RS-Integral

$$\int_a^b f(t)h(t)dt = f(t)dg(t) \quad \text{mit} \quad g(t) = \int_a^t h(s) ds$$

schreiben, falls  $f$  Riemann-integrierbar und  $h$  stetig ist.

*Beweis:* Die Funktion  $f \in R(I)$  ist beschränkt, etwa  $|f| \leq K$ . Zu  $\epsilon > 0$  wird ein  $\delta > 0$  so gewählt, dass  $|g'(\tau) - g'(\tau')| < \epsilon$  gilt, falls  $|\tau - \tau'| < \delta$  ist. Es sei  $|Z| < \delta$ . Nach dem Mittelwertsatz kann man  $\sigma(f, Z, \tau, g)$  in der Form

$$\sigma(f, Z, \tau, g) = \sum_{i=1}^k f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^k f(\tau_i)g'(\tau'_i)(t_i - t_{i-1})$$

schreiben, wobei  $\tau'_i \in [t_{i-1}, t_i]$  ist. Vergleicht man dies mit der Zwischensumme

$$\sigma^*(fg', Z, \tau) = \sum_{i=1}^k f(\tau_i)g'(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$$

zum Integral  $J = \int_a^b fg'dt$ , so findet man  $|\sigma - \sigma^*| < K\epsilon(b - a)$ . Da diese Ungleichung für alle Zerlegungen  $|Z| < \delta$ , also insbesondere für alle Verfeinerungen einer fest gewählten solchen Zerlegung gilt, sind die beiden Integrale gleich.  $\square$

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos t d(\sin t) &= \int_0^\pi \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\pi \\ \int_0^\pi \cos t d(\cos t) &= - \int_0^\pi \cos t \cdot \sin t dt = 0. \end{aligned}$$

**Satz 4.10:** Hat  $g$  an  $c \in [a, b]$  eine Sprungstelle mit Sprunghöhe  $\alpha$ , so ist  $g - \alpha \mathbb{I}_{(c, \infty)}$  bzw.  $g - \alpha \mathbb{I}_{[c, \infty]}$  an  $c$  stetig.

Damit folgt:

Ist  $f$  über  $[a, b]$  Riemann-integrierbar und  $g$  auf  $[a, b]$  mit Ausnahme endlich

vieler Sprungstellen  $c_1, \dots, c_n$  differenzierbar und gilt  $\int_a^b |g'(x)| dx < \infty$ , so folgt:

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot f(c_j),$$

wobei  $\alpha_j$  die Sprunghöhe von  $g$  an  $c_j$  ist.

Eine weitere Methode, die Sprunghöhe von  $g$  auszuschalten besteht bei stetigem  $f$  in partieller Integration (Satz 4.3).

**Beispiel:** Sei  $f(x) = x$ ,  $I = [-1, 3]$  und

$$g(x) = \begin{cases} e^x & x < 0, \\ 2 & 0 \leq x < 2, \\ 1 - x^2 & x \geq 2 \end{cases}, \quad g'(x) = \begin{cases} e^x & x < 0, \\ 0 & 0 \leq x < 2 \\ -2x & x \geq 2 \end{cases}$$

Berechnung von  $\int_{-1}^3 f dg$

1. mit Hilfe von Satz 4.10:

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -5$$

$$\int_{-1}^3 f dg = \int_{-1}^0 x \cdot e^x dx + \int_2^3 -2x^2 dx + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-5) = 2e^{-1} - \frac{71}{3}$$

2. mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 f dg &= f \cdot g|_{-1}^3 - \int_{-1}^3 g(x) dx \\ &= 3 \cdot (-8) + e^{-1} - \int_{-1}^0 e^x dx - \int_0^2 2 dx - \int_2^3 1 - x^2 dx \\ &= 2e^{-1} - \frac{71}{3} \end{aligned}$$

## 4.4 Mittelwertsätze für Riemann-Stieltjes-Integrale

Ist  $g$  wachsend, so sind die in den RS-Summen auftretenden  $g$ -Differenzen nichtnegativ. Aus  $f_1 \leq f_2$  folgt also  $\sigma(f_1, Z, \tau, g) \leq \sigma(f_2, Z, \tau, g)$  und eine entsprechende Ungleichung für die Integrale. Wendet man dieses Ergebnis auf die Ungleichungen  $\inf f \leq f(t) \leq \sup f$  an, so ergibt sich folgender Satz.

**Satz 4.11 (Erster Mittelwertsatz):** Existiert  $\int_a^b f dg$  und ist  $g$  in  $I = [a, b]$  wachsend, so ist

$$\int_a^b f dg = \mu \int_a^b dg = \mu[g(b) - g(a)] \quad \text{mit} \quad \inf_I f \leq \mu \leq \sup_I f$$

Ist  $f$  stetig, so gibt es ein  $\xi \in I$  mit  $\mu = f(\xi)$ .

**Satz 4.12 (Zweiter Mittelwertsatz):** Die Funktion  $f$  sei im Intervall  $I = [a, b]$  monoton, und  $g$  sei stetig in  $I$ . Dann existiert das Integral  $\int_a^b f dg$ , und es gibt ein  $c \in I$  mit

$$\begin{aligned} \int_a^b f dg &= f(a) \int_a^c dg + f(b) \int_c^b dg \\ &= f(a)[g(c) - g(a)] + f(b)[g(b) - g(c)]. \end{aligned}$$

*Beweis:* Man kann annehmen, dass  $f$  wachsend ist. Das Integral  $\int_a^b g df$  existiert nach Lemma 4.5 und nach dem ersten Mittelwertsatz hat es den Wert  $g(c)[f(a) - f(b)]$  mit  $c \in I$ . Nach dem Satz 4.3 über partielle Integration existiert das Integral  $\int_a^b f dg$ , und es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f dg &= fg|_a^b - \int_a^b g df \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - g(c)[f(b) - f(a)]. \end{aligned}$$

Das ist gerade die behauptete Gleichung.

□

## 5 Anwendungen

### 5.1 Kurvenintegrale

**Definition 5.1:** Es sei  $I = [a, b]$  und  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Jordansche Darstellung einer rektifizierbaren Jordankurve  $C = \phi(I)$  mit der Längenfunktion  $s(t) :=$

$L(\phi([a, t]))$ . Ferner sei auf der Menge (=Kurve)  $C$  eine reelwertige Funktion  $f$  erklärt. Das folgende Riemann-Stieltjes

$$\int_C f(x) ds := \int_a^b f(\phi(t)) ds(t)$$

nennt man das **Kurvenintegral** von  $f$  über die Kurve  $C$  bezüglich der Bogenlänge.

**Bemerkung:** Eine Kurve heißt rektifizierbar, wenn sie endliche Länge hat.

Eine Kurve  $C$  sei mit kontinuierlich verteilter Masse belegt (man denke etwa an einen gebogenen Draht), und es sei  $\rho(x)$  die lineare Dichte (Masse pro Längeneinheit) im Punkt  $x \in C$ . Die Gesamtmasse  $M$  und der Schwerpunkt  $S$  dieser Massenbelegung von  $C$  sind also durch die RS-Integrale

$$M = \int_C \rho(x) ds, \quad S = \frac{1}{M} \int_C x \rho(x) ds$$

gegeben.

## 5.2 Wahrscheinlichkeitstheorie

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, W)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(\Omega', \mathcal{A}')$  ein Messraum. Jede messbare Funktion  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$  heißt Zufallsvariable. Als Verteilung von  $X$  bezeichnet man das Bildmaß

$$\mathbb{P} := W^X := W(X^{-1}(A)) \quad A \in \mathcal{A}'.$$

Damit wird  $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Wir bezeichnen

$$\mathbb{E} g \circ X := \int_{\Omega} g \circ X dW = \int_{\Omega'} g d\mathbb{P},$$

mit  $g : (\Omega', \mathcal{A}') \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  und  $g$  meßbar, als Erwartungswert von  $g \circ X$ .

Mit  $g := id_{\mathbb{R}}$  erhalten wir den Erwartungswert von  $X$ .

$$\mathbb{E} id_{\mathbb{R}} \circ X := \int_{\Omega} X dW.$$

Ist  $F$  die Verteilungsfunktion von  $X$  so kann man den Erwartungswert von  $X$  auch als Lebesgue-Stieltjes-Integral darstellen.

$$\mathbb{E} id_{\mathbb{R}} \circ X := \int x dF$$

### 5.3 Darstellungssatz von Riesz

**Satz 5.2:** Sei  $T \in C'[a, b]$ . Dann existiert ein  $\alpha \in BV[a, b]$  mit

$$T(f) = T_{\alpha}(f) := \int_a^b f d\alpha$$

für alle  $f \in C[a, b]$ . Außerdem kann  $\alpha$  so gewählt werden, dass  $V_a^b(\alpha) = \|T\|$  und  $\alpha(a) = 0$ .

**Bemerkung:**  $C'[a, b]$  ist die Menge aller linearen, beschränkten Abbildungen  $T : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 5.4 Integration nach einer Brownschen Bewegung

**Definition 5.3:** d-dimensionale Brownsche Bewegung (mit Filtration) heißt jeder an eine Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  adaptierte stochastische Prozess  $(B_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  mit Zustandsraum  $\mathbb{R}^d$ , wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. Für jede Wahl der Zeitpunkte  $0 \leq s < t$  ist  $B_t - B_s$  von  $\mathcal{F}_s$  unabhängig und es gilt:

$$Vert(B_t - B_s) = \nu_{0,t-s} \otimes \dots \otimes \nu_{0,t-s} \quad (\text{d Faktoren}).$$

2. Fast alle Pfade des Prozesses sind stetig.

Gilt zusätzlich  $B_0 = 0$  fast sicher, so heißt  $(B_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  eine normale d-dimensionale Brownsche Bewegung (mit Filtration). Für  $d = 1$  nennt man  $(B_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  eine reelle Brownsche Bewegung (mit Filtration).

**Satz 5.4:** Fast sicher jeder Pfad einer d-dimensionalen Brownschen Bewegung ist auf jedem Intervall  $[s, t]$  mit  $0 \leq s < t < \infty$  von unbeschränkter Variation.

**Satz 5.5:** Es sei  $(B_t)_{t \geq 0}$  eine  $d$ -dimensionale Brownsche Bewegung. Für jede Unterteilung  $Z = (s = t_0 < \dots < t_n = t)$  eines Intervalls  $[s, t] \subset \mathbb{R}_+$  mit  $s < t$  gilt

$$\mathcal{L}^2 - \lim_{|Z| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n |B_{t_j} - B_{t_{j-1}}|^2 = d \cdot (t - s).$$

**Definition 5.6:** Man nennt jede Zufallsvariable  $Z_t$  stochastisches Integral, wenn gilt:

$$Z_t = \int_0^t X dB := \int_0^t X_s dB_s$$

für geeignete reelle stochastische Prozesse  $(X_t)_{t \geq 0}$  bezüglich einer reellen normalen Brownschen Bewegung.

Das mit  $dB_s$  behaftete Integral mag nach Satz 5.4 auf den ersten Blick sinnlos erscheinen, jedoch gelang es dem japanischen Mathematiker KIYOSCHI ITÔ das stochastische Integral sinnvoll zu definieren.

Man versucht ähnlich wie beim Riemann-Integral ein Integral  $Z_t$  für  $t > 0$  als geeigneten Grenzwert von Summen der Form

$$\sum_{j=1}^n X_{\tau_j} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$$

zu definieren, wobei  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  eine Unterteilung des Intervall  $[0, t]$  ist und  $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$ . Dass dieser Ansatz - geeignet modifiziert - sinnvoll ist soll an Hand eines Beispiels gezeigt werden.

**Beispiel:** Wir betrachten das spezielle stochastische Integral

$$\int_0^t B dB$$

Dabei ist  $(B_t)_{t \geq 0}$  eine reelle normale Brownsche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Für  $t > 0$  sei  $Z = (0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t)$  eine Zerlegung von  $[0, t]$  und  $\tau$  eine dazugehörige Belegung. Wir setzen

$$S_Z := \sum_{j=1}^n B_{\tau_j} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}),$$

und fragen nach dem Grenzverhalten von  $S_Z$  für  $|Z| \rightarrow 0$ . Mit Hilfe der elementaren Identität

$$c(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(b-a)^2 + (b-c)(c-a) + (c-a)^2$$

für je drei Zahlen  $a, b, c \in \mathbb{R}$  erhält man (für  $a = B_{t_{j-1}}, b = B_{t_j}$  und  $c = B_{\tau_j}$ )

$$\begin{aligned} S_Z &= \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}B_0^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^n (B_{t_j} - B_{\tau_j})(B_{\tau_j} - B_{t_{j-1}}) + \sum_{j=1}^n (B_{\tau_j} - B_{t_{j-1}})^2 \end{aligned}$$

wobei  $B_0 = 0$  f.s. gilt. Die erste Summe ist uns bekannt, da nach Satz 5.5 gilt

$$\mathcal{L}^2 - \lim_{|Z| \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 = \frac{1}{2}t.$$

Wegen  $t_{j-1} \leq \tau_j \leq t_j$  folgt aus der Unabhängigkeit der Zuwächse einer Brownschen Bewegung für jeden Summanden der zweiten Summe

$$E[(B_{t_j} - B_{\tau_j})(B_{\tau_j} - B_{t_{j-1}})] = E[(B_{t_j} - B_{\tau_j})]E[(B_{\tau_j} - B_{t_{j-1}})] = 0$$

und damit

$$\begin{aligned} V[(B_{t_j} - B_{\tau_j})(B_{\tau_j} - B_{t_{j-1}})] &= E[(B_{t_j} - B_{\tau_j})^2]E[(B_{\tau_j} - B_{t_{j-1}})^2] \\ &= (t_j - \tau_j)(\tau_j - t_{j-1}) \leq |Z|(t_j - t_{j-1}) \end{aligned}$$

für  $j = 1 \dots n$ . Auch die Summanden der zweiten Summe sind paarweise unabhängig und somit gilt

$$V\left[\sum_{j=1}^n (B_{t_j} - B_{\tau_j})(B_{\tau_j} - B_{t_{j-1}})\right] \leq |Z| \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) = |Z|t$$

Damit ergibt sich für die zweite Summe

$$\mathcal{L}^2 - \lim_{|Z| \rightarrow 0} (B_{t_j} - B_{\tau_j})(B_{\tau_j} - B_{t_{j-1}}) = 0$$

Auch bei der dritten Summe, wir nennen sie vorübergehend  $J$ , sind die Summanden paarweise unabhängig. Mit Hilfe von

$$V(|B_t - B_s|^2) = 2(t-s)^2 \quad (0 \leq s \leq t)$$

erhalten wir

$$V(J) = \sum_{j=1}^n V[(B_{\tau_j} - B_{t_{j-1}})^2] = 2 \sum_{j=1}^n (\tau_j - t_{j-1})^2 \leq 2|Z|t.$$

Wegen

$$E(J) = E[(B_{\tau_j} - B_{t_{j-1}})^2] = \sum_{j=1}^n (\tau_j - t_{j-1})$$

und  $V(J) = E([J - E(J)]^2)$  erhält man die Konvergenzaussage

$$\mathcal{L}^2 - \lim_{|Z| \rightarrow 0} \left\{ \sum_{j=1}^n (B_{\tau_j} - B_{t_{j-1}})^2 - \sum_{j=1}^n (\tau_j - t_{j-1}) \right\} = 0.$$

Zusammenfassend ist damit gezeigt, dass

$$\mathcal{L}^2 - \lim_{|Z| \rightarrow 0} \left\{ S_Z - \sum_{j=1}^n (\tau_j - t_{j-1}) \right\} = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$$

gilt. Dies aber führt zu der Idee, nach der  $\mathcal{L}^2$ -Konvergenz von  $S_Z$  für  $|Z| \rightarrow 0$  zu fragen und das stochastische Integral durch den betreffenden Limes zu definieren.

Ganz anders als beim Riemann-Integral kommt es nun aber wesentlich auf die Wahl der Zwischenpunkte  $\tau_j$  an.

Beim stochastischen Integral von K. Itô, wird stets  $\tau_j = t_{j-1}$  gewählt und man erhält das **Itô-Integral**  $\int_0^t X dB$ .

Insbesondere in der Quantenphysik und der Finanzmathematik hat sich der Itô-Kalkül zu einem unverzichtbaren mathematischen Werkzeug entwickelt.

## Literatur

- [RI] LEONARD F. RICHARDSON: Advanced Calculus, John Wiley & Sons, Inc. 2008
- [WA] WOLFGANG WALTER: Analysis 2, 4. Auflage, Springer Verlag Berlin.Heidelberg.New York 1995
- [MI] PROF. RAINER MLITZ: Analysis 2 - Skriptum zur Vorlesung, Auflage 2007
- [BA] HEINZ BAUER: Wahrscheinlichkeitstheorie, 4.Auflage, Walter de Gruyter Berlin.New York 1991
- [MuW] P. DÖRSEK, A. MAYER, K. RUPP, C. SATKE, W. WERTZ: Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie - Skriptum zur Vorlesung von Prof. Dr. Wolfgang Wertz, WS 2006/07, 3. Auflage